

Obrtnička i tehnička škola Dubrovnik

Tehničar geodezije i geoinformatike

-završni rad-

GEOIDNA UNDULACIJA

(izmjera, analiza i obrada)



Izradila:

Petra Borozan

Mentor/ica:

Aida Čustović Lučić, dipl.ing.geod.

Školska godina 2025./2026.

Dubrovnik, svibanj 2026

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. FIZIKALNA GEODEZIJA	2
2.1. Zemlja nije savršenog oblika	2
2.2. Važnost Zemljinog oblika za geodete	3
2.3. Razlog nepravilnog oblika Zemlje	3
2.4. Fizikalna geodezija	5
2.5. Gravimetrija	5
3. SILA TEŽA	6
3.1. Gravitacija	6
3.2. Gravitacijsko polje	7
3.3. Centrifugalna sila	8
3.4. Sila teža	10
3.5. Ubrzanje sile teže	12
3.6. Izračun vrijednosti ubrzanja sile teže	13
3.7. Geopotencijal	16
3.8. Ekvipotencijalne plohe	16
4. MODELI OBLIKA ZEMLJE	17
4.1. Zašto su potrebni modeli Zemlje	17
4.2. Geoid	18
4.3. Elipsoid	20
4.4. Geodetski datum	23
5. VISINE	25
5.1. Vrste visina	25
5.2. Elipsoidna visina	27
5.3. Ortometrijska visina	28
5.4. Geoidna undulacija	30
6. VISINSKI I KOORDINATNI SUSTAV	32
6.1. Reperi	32
6.2. HTRS71	32
6.3. Metode određivanja visina	33
6.4. HTRS96	35
6.5. Konverzija i transformacija	36
7. PRAKTIČNI DIO	37
7.1. Pronalaženje podataka	37
7.2. Izmjera	39
7.3. Obrada podataka	42
7.4. Izračun geoidne undulacije	44

7.5. Usporedba geoidne undulacije dobivenim različitim metodama.....	45
7.6. Položajni opisi repera koje smo mjerili	46
8. ZAKLJUČAK.....	51
LITERATURA	52
POPIS SLIKA.....	53

1. UVOD

Geodezija obuhvaća različita područja kao što su katastar, fotogrametrija i kartografija koja se često rade na nastavi i u praksi. Ipak, temelj svih tih područja čini fizikalna geodezija jer se njome određuje oblik Zemlje i sustavi u kojima se obavljaju mjerenja.

Tako se u ovom završnom radu obrađuje tema geoidne undulacije, jednog od važnih pojmova fizikalne geodezije. Geoidna undulacija predstavlja razliku između elipsoidne i ortometrijske visine te ima važnu ulogu u povezivanju matematičkog modela Zemlje s njezinim stvarnim fizikalnim oblikom. Pošto Zemlja nije pravilno geometrijsko tijelo nego složen sustav pod utjecajem različitih sila, potrebno je koristiti odgovarajuće modele i metode kako bi se osigurala točnost geodetskih mjerenja.

Motivacija za izradu ovog rada dolazi zbog važnosti koje geoidna undulacija ima u geodeziji. Ona je ključna za točnost mjerenja, pogotovo pri određivanju visina. Dodatni razlog za odabir ove teme je osobni interes za fiziku i njezinu primjenu u geodeziji, kao i njezina važnost u svakodnevnom radu geodeta.

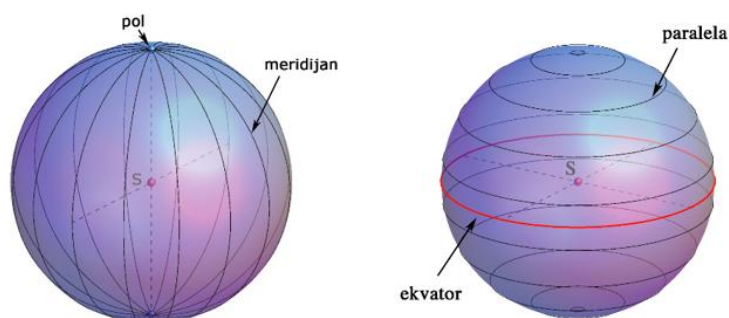
Cilj ovog rada je objasniti pojam geoidne undulacije kroz teorijski i praktični dio te prikazati njezinu ulogu u geodeziji. U radu se istražuje problem razlike između različitih modela Zemlje i njihov utjecaj na određivanje visina. Također se analiziraju metode mjerenja i izračuna geoidne undulacije te se uspoređuju dobiveni rezultati.

Rad je podijeljen tako da se prvo objašnjava teorijski dio, zatim primjena, a na kraju se donosi zaključak. Teorijski dio obuhvaća osnovne pojmove fizikalne geodezije, sile teže, modele Zemlje i vrste visina, dok se u praktičnom dijelu provodi izmjera i obrada podataka radi određivanja geoidne undulacije.

2. FIZIKALNA GEODEZIJA

2.1. Zemlja nije savršenog oblika

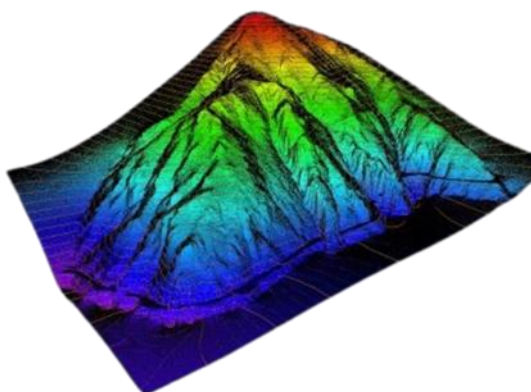
Dobro znamo da Zemlja nije ravna ploha nego je okrugla, ali ona opet nije savršena kugla tj. sfera (geometrijsko tijelo u kojem su sve točke jednako udaljene od središta) kakvu ju inače zamišljamo.



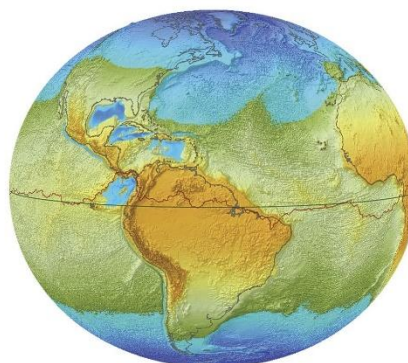
Slika 1 - Zemlja kao savršena sfera

Prvi razlog zašto Zemlja ne može biti sfera je to što površina Zemlje nije glatka nego je vrlo složena i nepravilna. Na njoj se nalaze planine, doline, rijeke, jezera, oceani itd. što znači da nijedna točka nije jednako udaljena od središta Zemlje.

Uz to, sama Zemlja je nepravilnog oblika jer je spljoštena na polovima, a izbočena na ekvatoru. To znači da udaljenost od središta Zemlje do ekvatora nije jednake udaljenosti kao do polova što predstavlja drugi razlog zašto Zemlja nije savršena sfera. Možemo to zamisliti kao npr. loptu koju smo uzeli i zggnječili na gornjem i donjem djelu, a raširili u sredini tako da na kraju dobivamo oblik sličan ragbi lopte. Mnogo je razloga odgovornih zašto je Zemlja nepravilnog oblika od zemljine rotacije do gravitacije. Sve te nepravilnosti uzrokuju da površina nije homogena (svugdje jednaka) zbog čega geodeti pri mjerenju, računanju visina i udaljenosti moraju uzimati u obzir te nepravilnosti kako bi dobili točne podatke.



Slika 2 - Zemljina realna površina



Slika 3 - spljošten oblik Zemlje

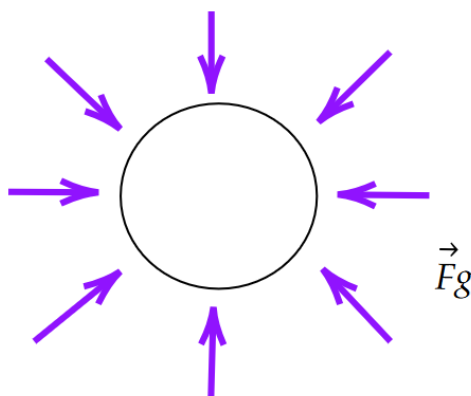
2.2. Važnost Zemljinog oblika za geodete

Da je Zemlja savršena sfera svi geodetski izračuni bi bili puno jednostavniji. Ali, zbog njezinog nepravilnog oblika geodeti moraju koristiti modele Zemlje koji uzimaju u obzir te nepravilnosti. Jer kad bi zanemarili te nepravilnosti došlo bi do pogrešaka u mjerenjima. Iako bi te pogreške na manjim udaljenostima bile zanemarive, na većim udaljenostima došlo bi do velikih odstupanja. Na primjer u kartografiji bi karte bile netočne, a položaji gradova i drugih objekata ne bi se podudarali sa stvarnim stanjem. Zato je važno geodetima odrediti sve nepravilnosti na Zemlji i njezin stvaran oblik jer je to temelj svih geodetskih zadataka od izrade karata do izgradnje cesta, mostova i korištenja GPS-a.

2.3. Razlog nepravilnog oblika Zemlje

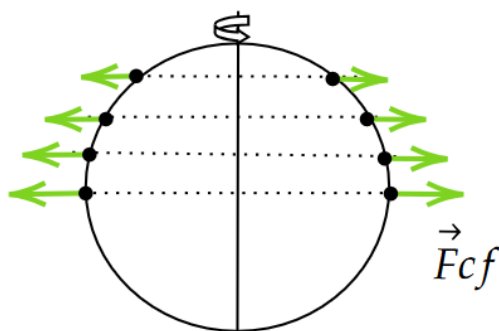
Glavni razlog nepravilnog oblika Zemlje je utjecaj različitih sila koje stalno djeluju i na taj način oblikuju Zemlju, a najveći utjecaj na Zemlju imaju gravitacijska i centrifugalna sila tj. sila teža.

Gravitacija (F_g) je privlačna sila između tijela koji imaju masu. Ona je osnovni razlog zašto Zemlja i svi ostali planeti imaju približno oblik sfere, a ne nekog drugog geometrijskog oblika. Jer kada se planeti stvaraju od oblaka plina i prašine gravitacija privlači svu tu materiju (sve što ima masu i zauzima prostor) prema središtu. Zbog toga se čestice plina i prašine skupljaju prema središtu. Kako se tijekom godina sve više materije skuplja u sredini, gravitacija postaje sve jača pa se sve više tvari skuplja prema centru. Tako se zbog gravitacije od tvari stvaraju planeti kuglastog oblika. Gravitacija privlači sve dijelove Zemlje prema njezinom središtu jer sve što ima masu na njega će djelovati gravitacija, a najveći dio Zemljine mase se nalazu u njenom centru. Da na Zemlju djeluje samo gravitacija Zemlja bi bila skoro savršena sfera, ali na Zemlju djeluje i centrifugalna sila.

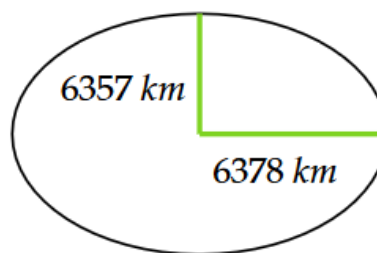


Slika 4 - utjecaj gravitacije (silnice)

Centrifugalna sila (F_{cf}) je sila koja pokušava odbaciti tijelo od središta gibanja i nastaje u rotirajućim sustavima (npr. nešto je centrifugalno kada se nešto pomiče/bježi iz središta). Tako centrifugalna sila nastaje zbog Zemljine rotacije oko svoje osi jer Zemlja ne miruje nego se stalno okreće (Zemlja se okreće oko svoje osi jednom u 24 sata). Kako se Zemlja okreće, centrifugalna sila uzrokuje da se materijal pomiče od središta tj. od osi rotacije zbog čega je Zemlja izbočena na ekvatoru, a spljoštena na polovima. Zbog toga udaljenost od središta Zemlje do ekvatora je oko 6378 km, dok je na polovima oko 6357 km. Kao rezultat toga, osoba na ekvatoru je oko 21 km dalje od središta Zemlje nego osoba na npr. Sjevernom polu tako ova razlika pokazuje da Zemlja nije savršena sfera.



Slika 5 - utjecaj centrifugalne sile



Slika 6 - uzrok utjecaja centrifugalne sile

Naravno nisu samo gravitacija i centrifugalna sila razlog nepravilnog oblika Zemlje postoji još mnogo efekata, slabijih sila i faktora koji čine Zemljin nepravilan oblik. Ali ove dvije sile zajedno stvaraju silu težu. Sila teža je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile. Ona određuje kako se materija raspoređuje na površini Zemlje i u kojem smjeru tijelo padne ako ga pustimo. Odnosno ta sila određuje smjer i jačinu privlačenja na Zemlji i na taj način oblikuje Zemlju.



Slika 7 - privlačenje na Zemlji

2.4. Fizikalna geodezija

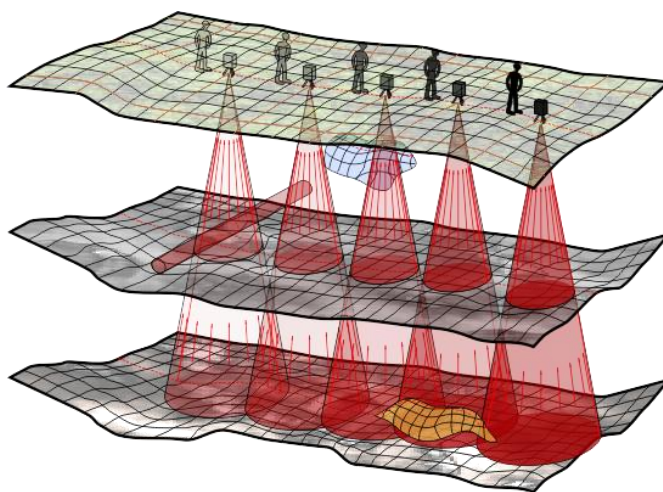
Upravo se time bavi fizikalna geodezija. Ona spaja fiziku s geodezijom na način da pomoću nje geodeti mogu razumjeti kako sile djeluju na Zemlju i kako to utječe na točnost mjerenja.

Fizikalna geodezija je grana geodezije koja proučava silu težu i njezino polje, razloge zašto se sila teža razlikuje od mjesta do mjesta te njezin utjecaj na oblik, veličinu i površinu Zemlje. I također povezuje djelovanje tih sila s geodetskim mjerenjima.

Fizikalna geodezija je važna za geodete jer geodeti proučavaju sile da bi znali kako površina Zemlje izgleda i kako se tijela ponašaju na njoj jer tijela i voda prirodno teže u smjeru sile teže, a površina Zemlje se oblikuje pod utjecajem te sile. Tako npr. visine, udaljenosti, položaji i rad geodetskih instrumenta ovisi o silama.

2.5. Gravimetrija

U ovom radu posebno ćemo se fokusirati na jedan dio fizikalne geodezije, a to je gravimetrija. Gravimetrija je dio fizikalne geodezije koji se bavi mjerenjem sile teže i njenog ubrzanja na različitim mjestima na Zemlji. Gravimetrija ima veliku važnost pri određivanju stvarnog oblika Zemlje, visina, visinskih razlika i geoidne undulacije jer geodeti koriste te podatke kako bi spriječili pogreške. Osim toga, gravimetrija se još bavi i mjerenjem Zemljinog gravitacijskog polja kako bi na temelju toga dobili informacije o građi Zemljine kore i otkrili podzemnu strukturu. Primjer primjene gravimetrije bi bila istraživanja nalazišta npr. nafte, na način da se prati promjena vrijednosti sile teže kako bi se otkrila područja s različitim gustoćama u podzemlju.

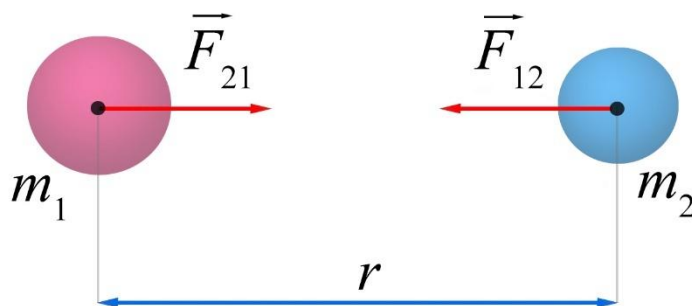


Slika 8 - gravimetrijska mjerenja

3. SILA TEŽA

3.1. Gravitacija

Gravitacija je privlačna sila između tijela koji imaju masu. Gravitacija ovisi o dva faktora: količini mase i udaljenosti između tijela. Jer gravitacija raste kako se masa tijela povećava, a smanjuje se kako povećamo udaljenost između tijela. Gravitacijska vrijednost još ovisi i o gravitacijskoj konstanti. Gravitacijska konstanta (G_0) je konstanta koja određuje jačinu gravitacijske sile između dvaju tijela. Ona uvijek ima istu vrijednost i ta vrijednost vrijedi za cijeli svemir. Ona povezuje mase tijela i udaljenost između njih u jednu formulu općeg zakona gravitacije.



Slika 9 - gravitacijska sila između dva tijela

Znači tijela s masom se međusobno privlače silom (gravitacijom) koja je proporcionalna umnošku njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti prema definiciji općeg zakona gravitacije.

$$F_g = G_0 \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

F_g - gravitacijska sila između dvaju tijela (N)

G_0 - gravitacijska konstanta ($G_0 = 6,67410^{-11} \cdot \text{Nm}^2 / \text{kg}^2$)

m_1 - masa prvog tijela (kg)

m_2 - masa drugog tijela (kg)

r - udaljenost između središta dvaju tijela (m)

To je jedna od četiri temeljne sile jer gravitacija je slaba sila, ali ima neograničeni doseg što znači da djeluje na beskonačne udaljenosti. Iako njen efekt slabi što je veća udaljenost ona nikad ne prestaje djelovati. Tako da nikad ne možemo pobjeći gravitaciji gdje god se nalazili.

Zemljina gravitacija je sila kojom Zemlja privlači sva tijela prema svom središtu jer je Zemljina masa relativno velika u usporedbi s masom stvari koje se nalazi na njoj. Iako se sva tijela međusobno privlače jedno drugo, Zemlja ima puno veću masu od bilo kojeg predmeta na njoj. Zato Zemljina gravitacija dominira i tako privlači predmete prema svom središtu jače nego što se oni međusobno privlače. Zbog toga npr. knjiga, stolica i mi stojimo na Zemljinoj površini jer nas Zemlja privlači prema njoj, a ne privlačimo se međusobno toliko da bismo to primijetili npr. ne osjetimo privlačenje između nas i knjige jer Zemljina gravitacija prevladava. Tako možemo izračunati utjecaj Zemljine gravitacije na tijelo kao:

$$F_g = G_0 \frac{Mm}{R^2}$$

M - masa Zemlje (kg)

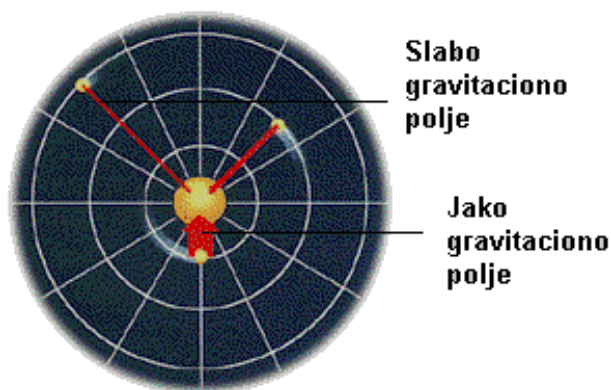
m - masa tijela (kg)

R - udaljenost od središta Zemlje do središta tijela (m)

3.2. Gravitacijsko polje

Osim silom, gravitacijsko djelovanje možemo opisati gravitacijskim poljem.

Za gravitaciju smo rekli da je to privlačna sila između tijela koja imaju masu, a polje je prostor u kojemu osjećamo djelovanje neke sile. Tako je gravitacijsko polje područje oko tijela s masom u kojem to tijelo djeluje gravitacijskom silom na druga tijela. U prostoru oko svake mase postoji gravitacijsko polje jer je masa izvor gravitacije. Gravitacijsko polje nam pomaže da umjesto računanja kako se dva tijela međusobno privlače jednostavno odredimo gravitacijsko polje jednog tijela, a onda vidimo kako ono djeluje na druga tijela. Tako npr. ako tijelo mase m stvara svoje gravitacijsko polje svako tijelo koje se nađe u tom prostoru osjetit će njegovo djelovanje.

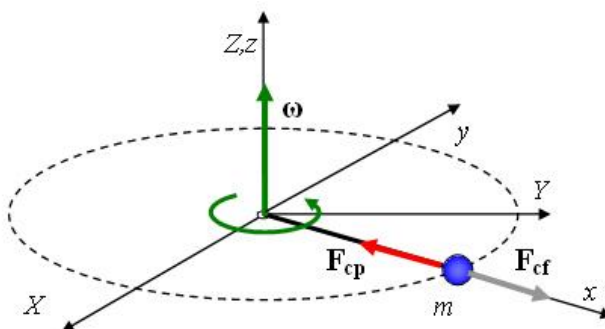


Slika 10 - utjecaj gravitacijskog polja na bliža i udaljenija tijela

3.3. Centrifugalna sila

Kako bi se tijelo gibalo po kružnici potrebna je sila koja će ga stalo vući prema središtu. Ta se sila zove centripetalna sila. Smjer centripetalne sile je od tijela prema središtu kružnice. Centripetalna sila je znači bilo koja sila koja održava tijelo na kružnoj putanji. Tako pri kruženju Zemlje oko Sunca ulogu centripetalne sile ima gravitacijska sila, koja je usmjerena prema Suncu.

Međutim, pri kružnom gibanju javlja se još jedna sila koja pokušava udaljiti tj. izbaciti tijelo od središta kružnice, a to je centrifugalna sila. Ona je obrnuto usmjerena od centripetalne sile, tj. od tijela prema van (djeluje okomito na os rotacije). Najpoznatiji primjer centrifugalne sile koju smo svi osjetili je osjećaj kao da nas nešto izbacuje iz auta u zavoju, e to bi bila centrifugalna sila.



Slika 11 - centrifugalna i centripetalna sila

Centrifugalna sila ima isti iznos kao centripetalna sila, samo je suprotnog smjera. Zato se računa istom formulom:

$$F_{cf} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

F_{cf} - centrifugalna sila (N)

m - masa tijela (kg)

v - obodna brzina (m/s)

r - udaljenost od središta kružnice (m)

ω - kutna brzina (rad/s)

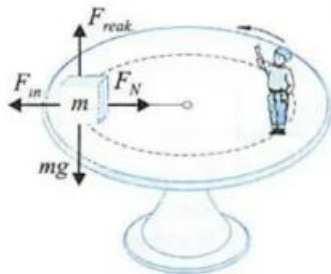
T - period (s)

Obodna brzina (v) je brzina kojom se tijelo giba po kružnici, a kutna brzina (ω) pokazuje koliko se brzo tijelo okreće tj. koliki kut tijelo opiše u jednoj sekundi. Period (T) je vrijeme potrebno da tijelo napravi jedan puni krug.

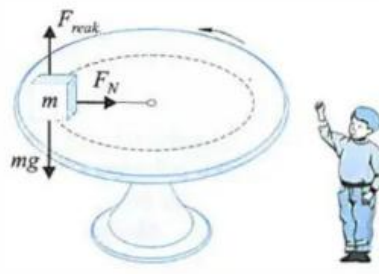
$$v = \frac{2r\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Mi promatramo centrifugalnu silu jer ju "vidi" samo promatrač koji se nalazi u rotirajućem sustavu, kao što se mi nalazimo na Zemlji koja se rotira. Dok centripetalnu silu "vidi" samo promatrač u mirnom sustavu npr. astronaut iz svemira gleda Zemlju i on "vidi" djelovanje centripetalne sile.



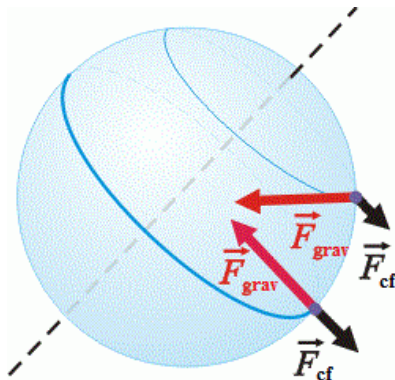
Slika 12 - promatrač "vidi" centrifugalnu silu



Slika 13 - promatrač "vidi" centripetalnu silu

Centrifugalna sila ne djeluje jednako na svim mjestima na Zemlji. Ona ovisi o udaljenosti od osi rotacije (slika 5), a ta udaljenost je najveća na ekvatoru tako je tamo brzina rotacije najveća, oko 1670 km/h, dok je na polovima gotovo jednaka nuli. Zbog toga je centrifugalna sila na ekvatoru najveća, a na polovima zanemariva.

Zbog centrifugalne sile Zemlja je izbočena na ekvatoru, a spljoštena na polovima. To dovodi do toga da gravitacijsko polje nije svugdje jednako. Tako danas Zemlja ima sferni oblik zbog gravitacije, a spljoštena je zbog centrifugalne sile.



Slika 14 - utjecaj gravitacijske i centrifugalne sile na Zemlju

3.4. Sila teža

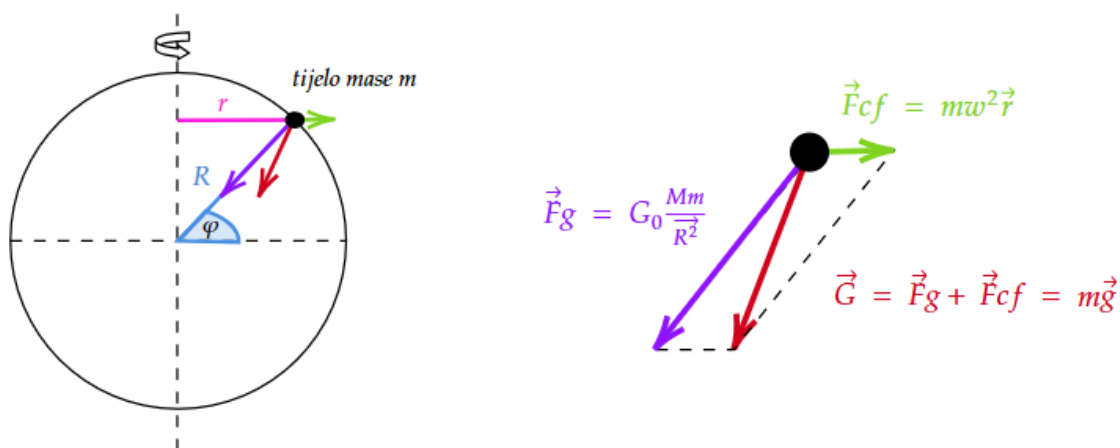
Pošto se sva geodetska mjerenja rade na površini Zemlje (znači u rotirajućem sustavu) osim gravitacije moramo uzimati u obzir i centrifugalnu silu. Centrifugalna sila djeluje od osi rotacije prema van, a gravitacije je usmjerena prema središtu zato zbog lakšeg računanja vektorski zbrajamo ove dvije sile kako ne bi smo trebali stalno gledati utjecaj prve pa druge sile nego jednostavno gledamo utjecaj jedne sile, a to je utjecaj sile teže. Zato se u geodeziji jako često spominje sila teža jer ona je temelj za određivanje oblika Zemlje i visina na njoj.

Sila teža je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile.

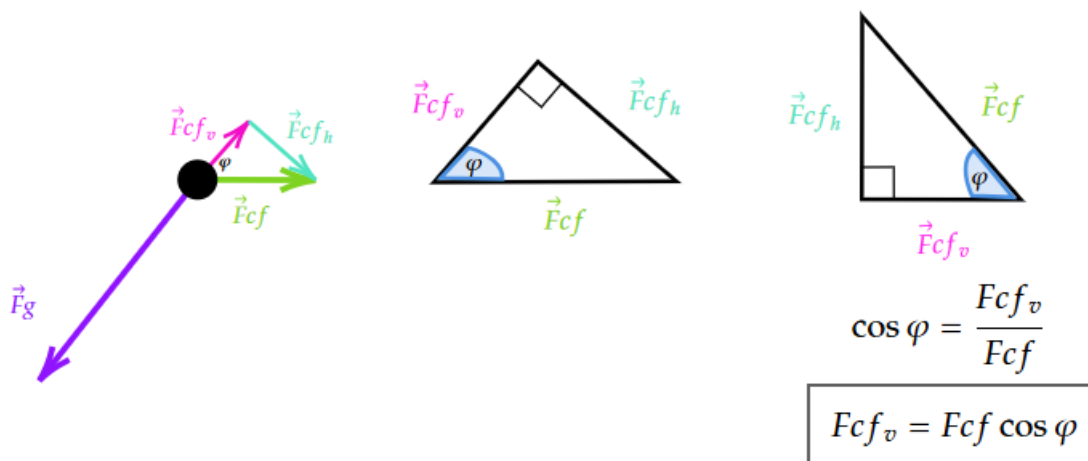
$$\vec{G} = \vec{F}_g + \vec{F}_{cf}$$

U ovom radu **silu težu označavat ćemo slovom G**, a ne kao inače oznakom F_g jer F_g u ovom slučaju predstavlja gravitacijsku silu. Ovdje oznaka G ne predstavlja težinu tijela, koja se inače koristi u fizici te težinu nećemo spominjati u ovom radu. Ovu oznaku koristimo zato što se u literaturi iz fizikalne geodezije sila teže često označava slovom G , tako isto gravitacijsku konstantu smo morali označiti kao G_0 , a ne kao što se inače označava isto kao samo G .

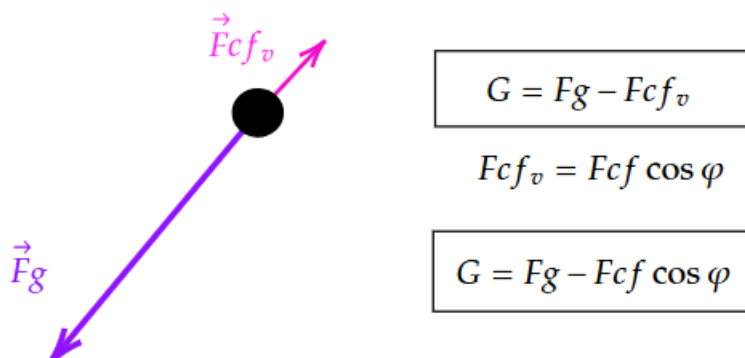
Općenito sile su vektorske veličine pa silu težu dobivamo tako što zbrojimo vektor od gravitacije i vektor od centrifugalne sile koji djeluju na tijelo na Zemlji.



Pošto gravitacijska i centrifugalna sila nisu uvijek kolinearne (ne leže na istom pravcu), centrifugalnu silu moramo rastaviti na dvije komponente: vertikalnu i horizontalnu kako bi dobili iznos sile teže. Vertikalna komponenta centrifugalne sile (F_{cfv}) djeluje u smjeru suprotnom od gravitacijske sile te zbog toga smanjuje njezin iznos. Horizontalna komponenta centrifugalne sile (F_{cfh}) ne utječe izravno na iznos sile teže, ali ima utjecaj na oblik Zemlje tj. čini Zemlju spljoštenom.



Iznos sile teže dobivamo kao rezultanta gravitacijske sile i vertikalne komponente centrifugalne sile. Pošto su te sile suprotno orijentirane njihov se vektorski zbroj može jednostavno izračunati kao razlika njihovih vrijednosti.



Gravitacijska sila je puno jača od centrifugalne sile, zbog čega centrifugalna sila ne poništava gravitaciju, već joj samo malo smanjuje iznos. Zato je tijelo na ekvatoru malo „lakše“ nego na polovima, ne zato što je gravitacija manja, nego zato što je centrifugalna sila na ekvatoru malo veća pa gravitaciju umanjuje malo više nego na polovima. Sila teža se zbog toga razlikuje od gravitacijske sile F_g i po smjeru i po iznosu, ali ne previše jer je $F_{cf} \ll F_g$.

3.5. Ubrzanje sile teže

Jednostavniji oblik formule za izračun sile teže je:

$$\vec{G} = m\vec{g}$$

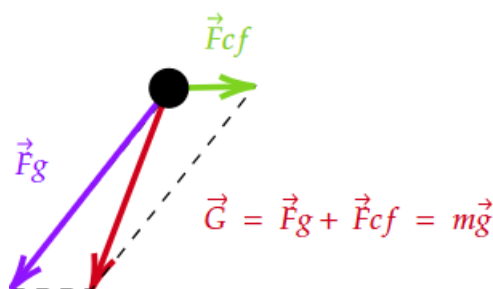
m - masa tijela (kg)

g - ubrzanje sile teže (m/s² ili N/kg)

Ova formula je dobila oblik prema 2. Newtonovomu zakonu (temeljni zakon gibanja) koji glasi ako na tijelo djeluje rezultantna sila (vektorski zbroj svih sila na tijelu) koja nije jednaka 0 tada se tijelo giba ubrzano (dobiva akceleraciju) u smjeru te rezultantne sile.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{G} &= m\vec{g}\end{aligned}$$

Kod sile teže umjesto opće akceleracije (a) koristi se ubrzanje sile teže (g) koji u svom iznosu uključuje djelovanje gravitacijske i centrifugalne sile i na taj način točno određeno ubrzanje koje tijelo dobiva pod djelovanjem Zemljinog polja (koliko neko tijelo privlači Zemlja).



Ubrzanje sile teže (g) je tako akceleracija koje tijelo dobiva pod djelovanjem sile teže, odnosno rezultante gravitacijske i centrifugalne sile. Mjerna jedinica za (g) je ista kao i kod akceleracije (m/s²).

Vrijednost g nije konstantna znači da nema uvijek istu vrijednost na cijeloj Zemlji kao što inače koristimo u izračunima da je uvijek $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Ona ovisi o više faktora kao što su udaljenosti od središta Zemlje i Zemljinoj rotaciji odnosno o F_g i F_{cf} .

Zbog toga se vrijednost g razlikuje od mjesta do mjesta – najveća je na polovima, a najmanja na ekvatoru.

3.6. Izračun vrijednosti ubrzanja sile teže

Prema tome g dobivamo kao:

$$\vec{G} = m\vec{g} \quad / : m$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{G}}{m}$$

Silu težu možemo napisati kao i rezultanta F_g i F_{cf} , ali nas zanima iznos g zbog toga se u daljnjem izračunu prelazimo s vektorskog zapisa na skalarni (iznosni) zapis. I njega dobivamo kao razlika iznosa gravitacijske sile i vertikalne komponente centrifugalne sile. Nakon toga ubacimo formule za F_g i F_{cf} te izlučimo masu kako bi je skratili s masom u nazivniku.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g + \vec{F}_{cf}}{m}$$

$$g = \frac{F_g - F_{cf_v}}{m}$$

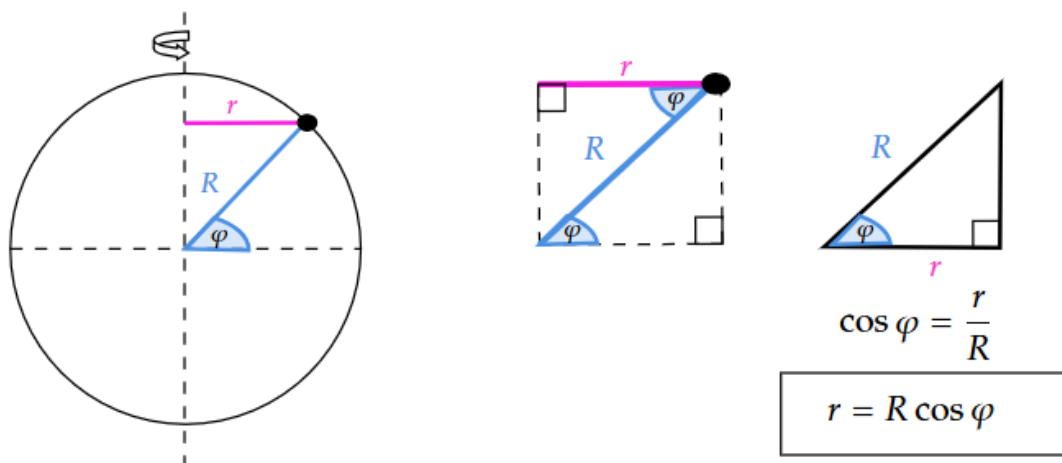
$$g = \frac{G_0 \frac{Mm}{R^2} - F_{cf} \cos \varphi}{m}$$

$$g = \frac{G_0 \frac{Mm}{R^2} - mw^2 r \cos \varphi}{m}$$

$$g = m \frac{G_0 \frac{M}{R^2} - w^2 r \cos \varphi}{m}$$

$$g = G_0 \frac{M}{R^2} - w^2 r \cos \varphi$$

U formuli za F_{cf} uzima se u obzir udaljenost tijela od osi rotacije Zemlje (r). Pošto se tijelo nalazi na Zemljinoj površini ta udaljenost ovisi o geografskoj širini (φ). Udaljenost točke od osi rotacije može se dobiti tako da se udaljenost r „spusti” (translacija vektora) do središta tako da bude okomita na os rotacije. Iz čega možemo r izraziti preko polumjera Zemlje (R) i geografske širine (φ). Općenito g ovisi o geografskoj širini jer se s promjenom širine mijenja utjecaj centrifugalne sile. Ovaj kut isti je kutu koji se koristi pri rastavljanju centrifugalne sile na vertikalnu i horizontalnu komponentu zbog sličnosti trokuta pa se isti kut koristi u svim izračunima.



$$g = G_0 \frac{M}{R^2} - w^2 R \cos \varphi \cos \varphi$$

$$g = G_0 \frac{M}{R^2} - w^2 R \cos^2 \varphi$$

$$g = G_0 \frac{M}{R^2} - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \cos^2 \varphi$$

Kada smo sredili formulu do kraja sada smo dobili sve konstante i veličine koje opisuju Zemlju. Sada u jednadžbu jednostavno uvrštavamo poznate podatke o Zemlji, kao što su Zemljin polumjer i masa..., čime se dobiva vrijednost ubrzanja sile teže.

podaci o Zemlji

$$G_0 = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$$

$$M = 5.9742 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$R = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$$

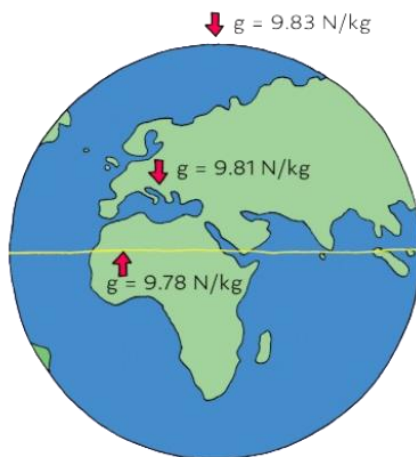
$$T = 24\text{h} = 86400 \text{ s}$$

$$\varphi = 45$$

$$g = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{5.9742 \cdot 10^{24}}{(6.371 \cdot 10^6)^2} - \left(\frac{2\pi}{86400} \right)^2 \cdot 6.371 \cdot 10^6 \cdot \cos^2(45)$$

$$\begin{aligned} g &= 9.8063 \text{ m/s}^2 \\ g &\sim 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Kako ubrzanje sile teže ovisi o geografskoj širini onda je na polovima Zemlje ubrzanje sile teže iznosi otprilike $g_p = 9,832 \text{ m/s}^2$, za geografsku širinu od $\varphi = 90^\circ$, dok je na ekvatoru ubrzanje sile teže manje, oko $g_e = 9,780 \text{ m/s}^2$, za geografsku širinu od $\varphi = 0^\circ$. Ovo je bio neki idealni izračun ubrzanja sile teže koji ne uzima u obzir utjecaje ostalih nebeskih tijela i nepravilan oblik Zemlje.



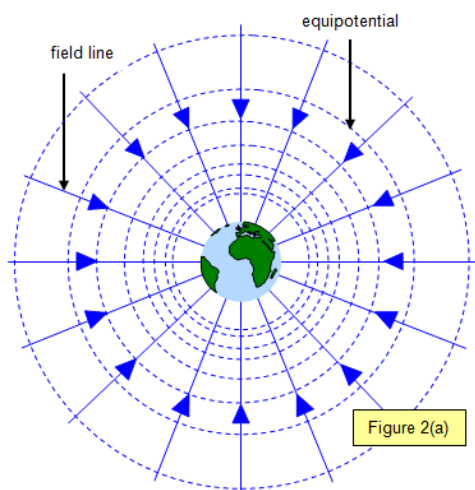
Slika 15 - ubrzanje sile teže na geografskoj širini od 90° , 45° i 0°

3.7. Geopotencijal

Djelovanje sile teže možemo još opisati i pomoću potencijala sile teže tj. geopotencijala. Općenito potencijalna energija (E_p) je energija koju tijelo ima zbog svog položaja u polju jer tada tijelo ima potencijal (sposobnost) obaviti rad. Na primjer, tijelo koje se nalazi na većoj visini može tijekom pada prijeći veći put i tako obaviti veći rad nego tijelo na manjoj visini. Međutim, potencijalna energija ovisi o masi tijela. Kako bismo opisali samo svojstva polja, a ne pojedinog tijela, uvodi se pojam potencijal sile teže (geopotencijal ϕ). Geopotencijal opisuje polje sile teže u nekoj točki prostora, neovisno o masi tijela. Ako tijelo mase m u točki A ima neku potencijalnu energiju E_{p1} , a onda premjestimo to tijelo u prostoru tako što ga npr. spustimo ili podignemo na točku B, potencijalna energija tijela će se promijeniti u E_{p2} . Geopotencijal tako ovisi o položaju točke u prostoru. Zbog toga geopotencijal nije jednak u svim točkama oko Zemlje, nego se mijenja od mjesta do mjesta. Što je tijelo više iznad Zemljine površine, to je veći geopotencijal. Zato se tijela prirodno gibaju iz područja većeg potencijala prema manjem potencijalu, zbog čega tijela padaju prema dolje, tj. prema Zemljinoj površini.

3.8. Ekvipotencijalne plohe

Na primjer, tijelo na visini od 13 m ima veći geopotencijal od tijela na visini od 10 m. Ako se tijelo s visine od 13 m spusti na 10 m, tada će oba tijela imati jednak geopotencijal jer se nalaze u istoj točki polja sile teže. Sve točke u prostoru koje imaju isti geopotencijal stvaraju ekvipotencijalnu plohu. Ako se tijelo giba unutar iste ekvipotencijalne plohe, njegova se potencijalna energija ne mijenja. U polju sile teže Zemlje ekvipotencijalne plohe su približno zatvorene plohe koje okružuju Zemlju. One nisu savršene kružnice zbog nepravilnog oblika Zemlje. Ekvipotencijalne plohe su jako važne u geodeziji jer pomoću njih određujemo pravi oblik Zemlje koje uzima u obzir utjecaje svih sila, a to je geoid.

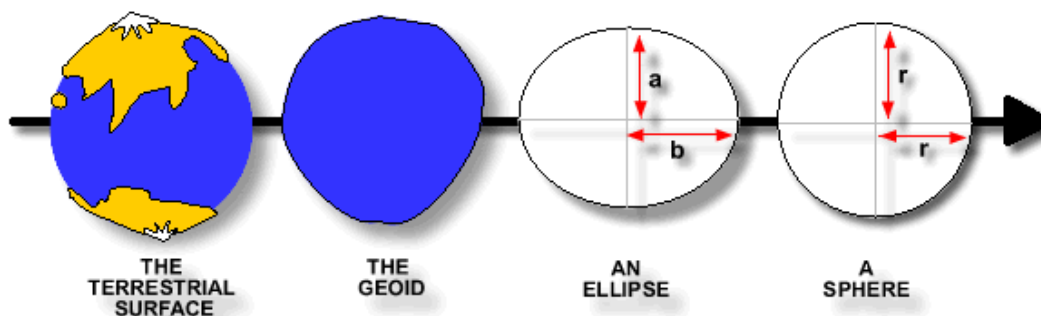


Slika 16 - ekvipotencijalne plohe

4. MODELI OBLIKA ZEMLJE

4.1. Zašto su potrebni modeli Zemlje

Površina Zemlje je vrlo složena i nepravilna. Znamo da se na Zemlji nalaze planine, doline, oceani i razne druge nepravilnosti zbog čega površina Zemlje nema jednostavan geometrijski oblik. Također kao što smo ranije spomenuli djelovanje sile teže nije svugdje jednako, pa ni Zemljin stvarni oblik nije pravilan. Zbog te nepravilnosti nije moguće izravno provesti točne matematičke izračune na stvarnoj površini Zemlje jer bi to učinilo matematičke izračune previše kompliciranima. Na primjer, bilo bi teško točno izračunati udaljenosti između točaka, površine ili visine kada bismo koristili stvarni reljef. Zato se u geodeziji koriste modeli oblika Zemlje. To su pojednostavljeni prikazi koji približno opisuju Zemlju i tako omogućuju jednostavnije i točnije računanje. Modeli ne prikazuju stvarnu Zemlju u potpunosti nego služe kao idealizirane površine na kojima se mogu provoditi geodetski izračuni ili približno objasniti oblik Zemlje. Ovisno o tome kolika nam je točnost potrebna i koja nam je svrha mjerenja, koristit ćemo različite modele Zemlje. Neki od njih su dosta jednostavni dok su drugi malo kompliciraniji. Tako najvažniji modeli koji se koriste u geodeziji su kugla, elipsoid, geoid i ponekad čak i ravnina.

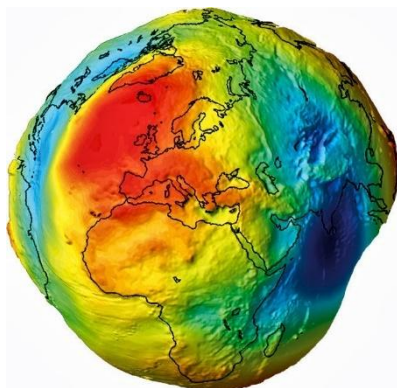


Slika 17 - modeli Zemlje (Zemljina površina, geoid, elipsoid i sfera)

Trenutno nećemo puno obraćati pažnju na modele Zemlje poput kugle i ravnine. Kugla se koristi samo za vrlo jednostavne i približne izračune (za područja do oko 200 km), dok se ravnina koristi za mala područja (do oko 20 km) gdje se zakrivljenost Zemlje može zanemariti. Nama su trenutno zanimljiviji geoid i elipsoid tj. oni su najvažniji modeli za geodeziju jer najrealnije opisuju oblik Zemlje i omogućuju točne izračune. Mjerenje se izvodi na stvarnoj Zemljinoj površini, s koje se ne može jednostavno računati, dok se računanje izvodi na elipsoidu, s kojeg se ne može izravno mjeriti. Ipak, i mjerenje i računanje trebaju se odnositi na geoid, na kojem se u pravilu ne može niti izravno mjeriti niti jednostavno računati. Sad se postavlja pitanje zašto je to tako?

4.2. Geoid

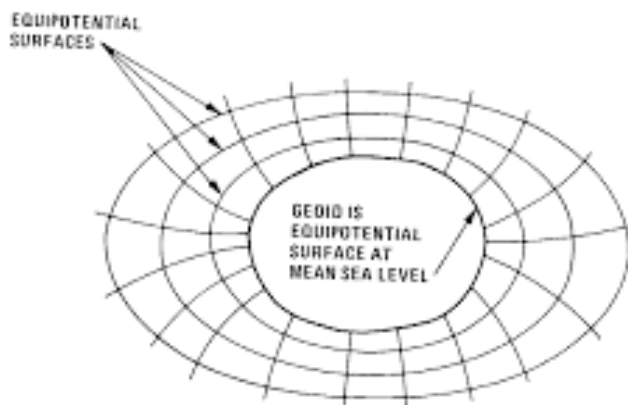
Geoid je zamišljena, teorijska površina koja se koristi u geodeziji kako bi što bolje opisali stvarni oblik Zemlje gledajući djelovanje sile teže. Za razliku od kugle i elipsoida, koji su matematički modeli (koriste se za jednostavnije računanje), geoid nije jednostavan matematički prikaz nego fizički model. To je model koji opisuje stvarna fizikalna svojstva Zemlje i temelji se na stvarnim mjerenjima, a ne na idealnim geometrijskim oblicima. Upravo zbog toga geoid se smatra modelom koji je najbližiji stvarnom obliku Zemlje.



Slika 18 - geoid

Pošto gravitacija nije jednaka na svim mjestima na Zemlji, geoid nema pravilan oblik. Planine imaju veću masu od dolina, pa je gravitacija u njihovoj blizini nešto jača. Zbog toga se geoid na takvim mjestima malo uzdiže. Suprotno tome, u područjima manje mase gravitacija je slabija, pa se geoid spušta. Budući da masa Zemlje nije jednako raspoređena, gravitacija se malo razlikuje od mjesta do mjesta, a te razlike određuju oblik geoida (jer sila teža ovisi o gravitaciji).

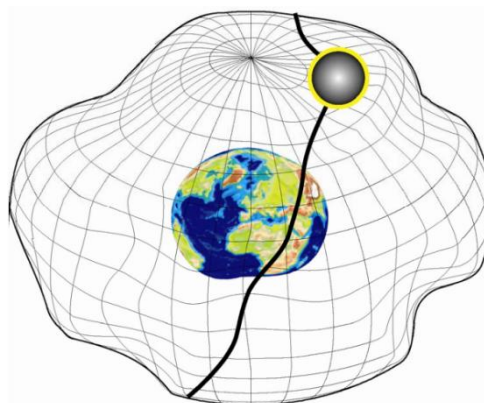
Tako je geoid zapravo definiran kao ekvipotencijalna površina sile teže. To znači da je na cijeloj toj površini potencijal sile teže jednak, pa se tijela na njoj nalaze u ravnoteži (nema razlike u potencijalu sile teže). Sila teža svugdje djeluje okomito na geoid, a ne sa strane tijela pa se tijela i tekućine na toj površini nalaze u mirnom stanju.



Slika 19 - ekvipotencijalna površina sile teže

To najlakše možemo zamisliti pomoću vode. Voda se uvijek kreće u smjeru sile teže tj. teži tome da zauzme položaj najnižeg potencijala tako da zauzme stanje ravnoteže. Na primjer, ako izlijevamo vodu u neku zdjelu, voda se sama rasporedi tako da joj je površina ravna i mirna. To znači da voda teži zauzeti najniži mogući položaj u svom polju sile teže.

Kada bi oceani bili potpuno mirni, bez valova, vjetra, plime i oseke njihova bi se površina rasporedila upravo po ekvipotencijalnoj površini sile teže, odnosno po geoidu (kao i voda koju izlijevamo u zdjelu). Ta zamišljena, površina mora naziva se srednja razina mora (nivo ploha mora) koja definira geoid. Geoid ne opisuje reljef Zemlje (planine i doline) već prema tome kako gravitacija djeluje u prostoru zato površina mora ne bi bila savršeno glatka niti pravilna, nego blago valovita zato je geoid nepravilan, ali uravnoteženog oblika.



Slika 20 - prikaz Zemljinog gravitacijskog polja i geoidne plohe

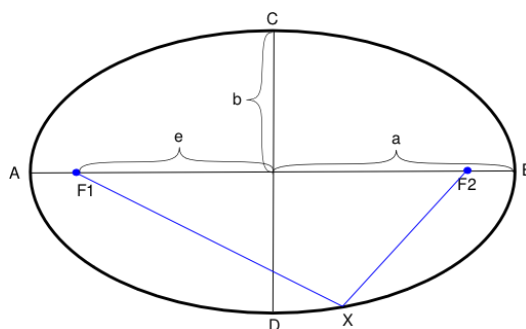
Iako je povezan s oceanima, geoid se ne zaustavlja na obalama, nego se zamišljeno proteže ispod kontinenata. Postoji mnogo ekvipotencijalnih ploha, ali za geoid se uzima ona ploha koja odgovara potencijalu sile teže srednje razine mora. Znači geoid je nakraju jedna posebna ekvipotencijalna površina sile teže koja bi se podudarala sa srednjom razini mora i oceana kad bi bili u ravnoteži, u potpunom mirovanju i da se protežu kroz kontinente.

Na taj način geoid postaje zajednička referentna površina za cijelu Zemlju. Kako bismo mogli odrediti visine na Zemlji upravo nam je bilo potrebno definirati neku referentnu površinu u odnosu na koju se te visine mjere. A u geodeziji se te visine najčešće odnose upravo na geoid. Međutim, iako je geoid fizički najrealniji model Zemlje, zbog njegovog nepravilnog oblika on se ne može matematički definirati pa računanje na njemu nisu moguća. Nego se zato za geodetske izračune koristi elipsoid.

4.3. Elipsoid

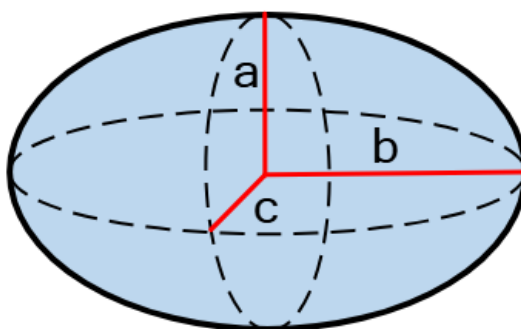
Pošto geoid ima nepravilnu i valovitu površinu na njemu se ne može računati. Zato se u geodeziji koristi elipsoid koji predstavlja jednostavniji i matematički definiran model Zemlje. To znači da oblik, veličina i položaj elipsoida nisu opisani npr. mjerenjem reljefa ili sila nego je točno opisan matematikom (točno su za elipsoid zadane veličine i formule s kojima se računa) za razliku od geoida koji je baš suprotan od elipsoida. Znači elipsoid je idealizirana glatka površina koji približno ima geometrijski oblik kao i Zemlja.

Elipsoid je nastao iz elipse. Elipsa je dvodimenzionalni (2D) geometrijski oblik koji ima duljinu i širinu. Ona ima oblik kao spljošteni krug s dva žarišta (F) za razliku od kruga čija se žarišta podudaraju na jednom mjestu u središtu. Kod elipse zbroj udaljenosti od ta dva žarišta do neke točke koja se nalazi na elipsi uvijek je jednaka (tako je elipsa definirana). Ona se još sastoji od velike poluosi (a) koja predstavlja polovicu dulje osi elipse i male poluosi (b) koja predstavlja polovicu kraće osi elipse. A te dvije poluosi određuju spljoštenost elipse.



Slika 21 - elipsa

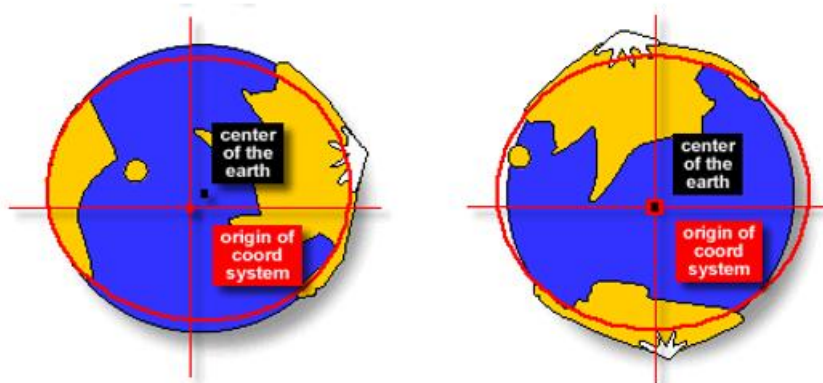
Kada se ta elipsa zarotira oko svoje kraće osi, nastaje trodimenzionalni (3D) geometrijski oblik koji se zove rotacijski elipsoid. Upravo je takvog oblika i Zemlja jer zbog svoje rotacije oko osi nije savršena kugla, već je spljoštena na polovima i izbočena na ekvatoru. Zato se kaže da je Zemlja približno oblika rotacijskog elipsoida.



Slika 22 - spljošteni rotacijski elipsoid

Iako se mjerenja izvode na stvarnoj Zemljinoj površini, rezultati se preračunavaju na elipsoid, zbog toga on predstavlja osnovnu podlogu svih koordinatnih sustava. Elipsoid koji se koristi u određenom koordinatnom sustavu naziva se referentni elipsoid. To je model na koji se svode geodetska mjerenja i na kojem se ona obrađuju. Referentni elipsoid ima točno određene dimenzije i položaj u prostoru te čini matematičku osnovu geodetskog sustava. Iako ne mora savršeno odgovarati cijeloj Zemlji on se bira tako da se što bolje poklopi s geoidom na nekom određenom području ili na cijelom planetu.

Ovisno o području na kojim se elipsoidi prilagode dijelimo ih na lokalne i globalne. Lokalni elipsoid je elipsoid koji se najbolje poklapa s geoidom na nekom ograničenom području npr. u jednoj državi ili regiji. Takav elipsoid dobro opisuje taj dio Zemlje, ali se ne može koristiti za cijelu Zemlju. Dok globalni elipsoid je prilagođen cijeloj Zemlji. Ali zato se on ne poklapa savršeno ni sa jednim točnim mjestom, ali najbolje opisuje prosječno podudaranje za cijelu Zemlju.

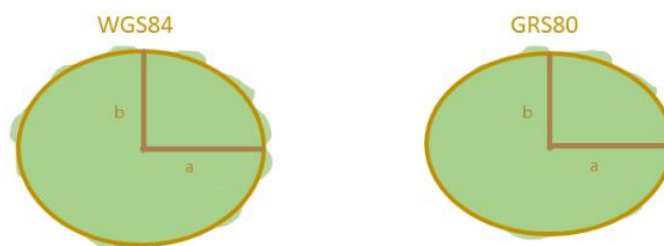


Slika 23 - lokalni i globalni elipsoid

Najpoznatiji elipsoidi koji geodeti koriste su WGS84, GRS80 i Bessel 1841.

WGS84 (World Geodetic System 1984) je globalni referentni elipsoid što znači da se koristi isti model i ista pravila za cijelu Zemlju. On opisuje oblik i položaj Zemlje u odnosu na njezino središte i koristi se u cijelom svijetu. WGS84 je službeni i osnovni sustav GPS-a. Tako se npr. WGS84 koristi u Google Mapsu ili GPS-u na mobitelu, automobilske navigaciji...Kada navigacija prikaže da se nalazimo na određenim koordinatama (N i E), te su koordinate izražene upravo preko elipsoida WGS84.

GRS80 (Geodetic Reference System 1980) je isto globalni referentni elipsoid koji se koristi za znanstvene i geodetske potrebe. Njegove dimenzije su jako slične WGS84, ali GRS80 je samo matematički elipsoid (model oblika Zemlje), a WGS84 je sustav koji se koristi u GPS-u i daje stvarne koordinate. GRS80 je stabilan matematički elipsoid koji se ne mijenja, dok se WGS84 s vremenom malo mijenja jer se prilagođava Zemlji (npr. zbog pomicanja Zemljine kore). Zato se za geodetske sustave koristi GRS80, a WGS84 za GPS i navigaciju. Na primjer geodeti izrađuje karte, planove ili elaborate na temelju mjerenja na terenu, a onda te podatke računaju i spremaju u sustavu koji se temelji na elipsoidu GRS80. U Hrvatskoj se danas koristi GRS80 elipsoid.



Slika 24 - razlika WGS84 i GRS80 elipsoida

Bessel 1841 je stariji, lokalni elipsoid koji je napravljen tako da se dobro poklapa s geoidom u Europi. Koristio se u uglavnom u svim europskim državama u 19. i 20. stoljeću pa tako i na području Hrvatske. Danas se uglavnom koristi samo u starim katastarskim planovima i kartama. Tako npr. ako se digitaliziraju stare katastarske karte njihovi se podaci često prvo nalaze u sustavu koji se utemeljio na elipsoidu Bessel 1841, pa ih je potrebno transformirati u WGS84 ili GRS80 da bi se mogli koristiti u današnjim sustavima.

Elipsoid	WGS84	GRS80	Bessel 1841
a	6 378 137,000 m	6 378 137,000 m	6 377 397,155 m
b	6 356 774,72 m	6 356 752,31 m	6 356 078,96 m
f	1/298,257223563	1/298,257222101	1/299,1528128

Slika 25 - parametri elipsoida

a - najdulji polumjer elipsoid (za elipsoid koji predstavlja Zemlju to je polumjer ekvatora)

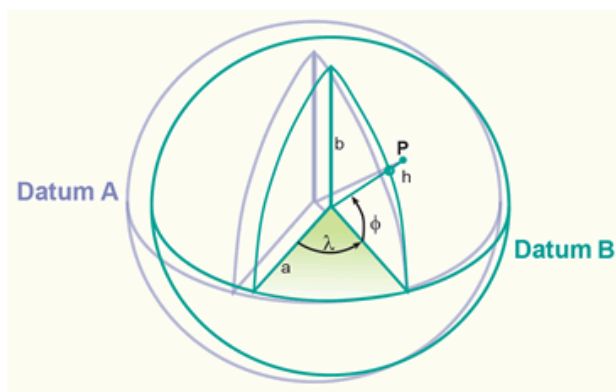
b - najkraći polumjer elipsoida (za elipsoid koji predstavlja Zemlju to je udaljenost od središta elipsoida do jednog od polova)

f - spljoštenost elipsoida (što je f veći to je elipsoid više spljošten ($f = \frac{a-b}{a}$))

4.4. Geodetski datum

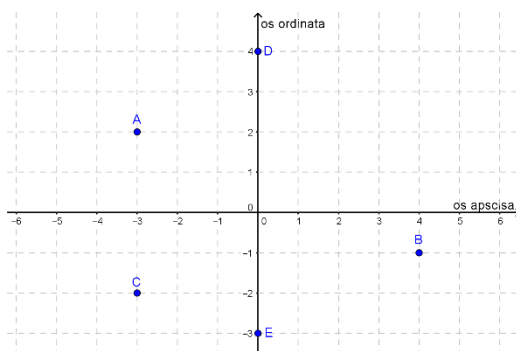
Kad smo objasnili što je elipsoid i koje vrste elipsoida postoje, sljedeći je korak povezati taj elipsoid s Zemljom. Elipsoid je samo matematički definirano geometrijsko tijelo, ali da bi se mogao koristiti u praksi tj. u geodeziji za određivanje koordinata i položaja točaka, mora biti točno postavljen u prostoru u odnosu na Zemlju. A to omogućuje geodetski datum.

Geodetski datum definira položaj, orijentaciju i dimenzije elipsoida u prostoru u odnosu na stvarnu Zemlju i njezin geoid. Najjednostavnije rečeno je da datum određuje kako je elipsoid „smješten” u odnosu na stvarnu Zemlju i geoid. Jer bez datuma elipsoid je samo geometrijsko tijelo, a s datumom on postaje dio koordinatnog sustava.



Slika 26 - primjer geodetskih datuma

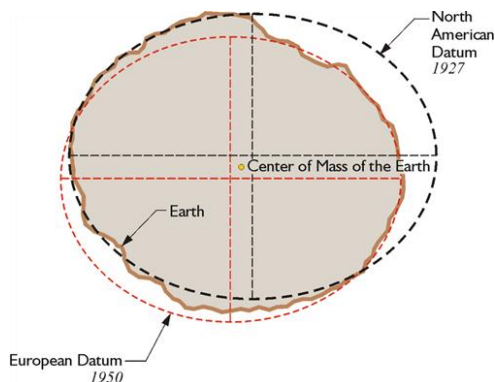
Općenito, koordinatni sustav je matematički sustav koji omogućuje da se položaj bilo koje točke na Zemlji ili u prostoru opiše pomoću brojeva, odnosno koordinata. Geodetski datum daje tom sustavu stvarno značenje jer povezuje matematički model s fizičkom Zemljom.



Slika 27 - koordinatni sustav

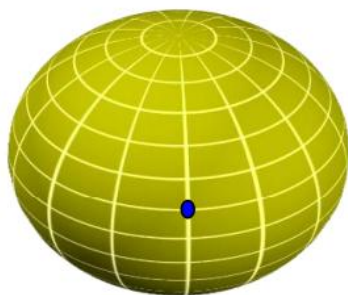
Geodetski datum može se usporediti s nekom početnom točkom u nekoj igri ili sportu. Tako npr. u bejzbolu postoji točka od koje se mjere svi udarci. Ta točka bi bila kao geodetska točka. To je općenito stalna točka na terenu je referentna točka za dobivanje bodova. U bejzbolu se sve udaljenosti mjere od te točke. Na primjer, koliko daleko udarimo loptu temelji se na našem odnosu prema toj točki. Bez te stalne točke bilo bi nemoguće pratiti rezultate igre. Na isti način, na Zemlji nam je potrebna jedna dogovorena stalna točka i sustav prema kojem mjerimo položaje. Tako geodetski datum to omogućuje tako da on daje zajedničku osnovu za određivanje položaja i udaljenosti na Zemljinoj površini.

Zemljina površina je velika i nepravilna, pa jedan elipsoid ne može savršeno odgovarati cijeloj Zemlji. Zato različite države i koordinatni sustavi koriste različite geodetske datume. Elipsoid se najčešće prilagođava lokalnom geoidu kako bi odstupanja bila što manja, a koordinate i visine bile što točnije.

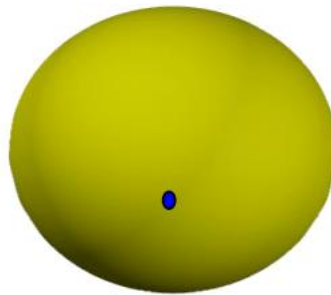


Slika 28 - Europski i sjevernoamerički datum

Znači datum objašnjava gdje se nalazi nulta točka koordinatnog sustava u odnosu na Zemlju, u kojem smjeru se gledaju osi i kako se elipsoid uklapa u stvarnu Zemlju, a koordinatni sustav koristi taj datum kako bi mogli izračunati položaje točaka.



Slika 29 - koordinatni sustav koji određuje kako je položaj početne točke



Slika 30 - datum koji definira početnu točku i referentnu površinu

U geodeziji razlikujemo dvije vrste datuma: horizontalni i vertikalni datum.

Horizontalni datum definira položaj točaka u ravnini (geografska širina i dužina). Određuje kako je elipsoid postavljen u odnosu na Zemlju. On se još dijeli na lokalni i globalni datum. Lokalni datum je prilagođen određenom području, a globalni datum je prilagođen cijeloj Zemlji. Razlika između globalnog i lokalnog elipsoida i datuma je to što je elipsoid oblik, a datum je njegov položaj i veza sa Zemljom.

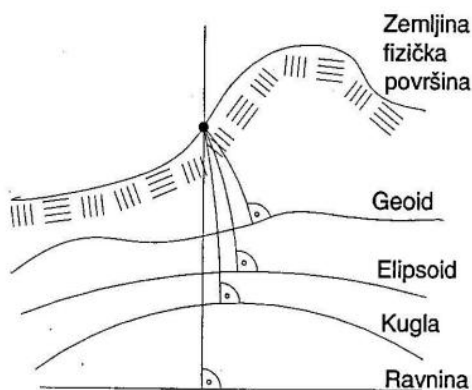
Vertikalni datum definira referentnu plohu za određivanje visina. Najčešće se temelji na srednjoj razini mora, odnosno na geoidu.

Geodetski datum nam je važan jer su datum i geoidna undulacija međusobno povezani. Bez točnog definiranog datuma ne možemo odrediti položaj točke, a onda ni točno izračunati geoidnu undulaciju.

5. VISINE

5.1. Vrste visina

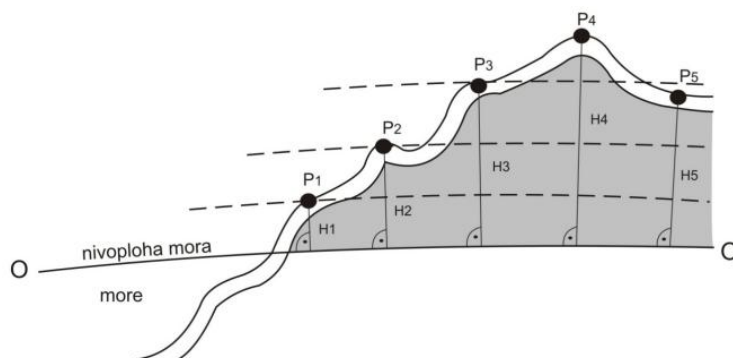
Kako bismo razumjeli što je geoidna undulacija jako je važno prvo objasniti koje vrste visina koristimo u geodeziji. Visina u geodeziji je udaljenost od neke točke koja se nalazi na Zemljinoj površini do određene referentne plohe, a njezina vrijednost ovisi o tome od koje plohe se mjeri. Ta udaljenost se uvijek mjeri duž pravca koji je okomit na referentnu plohu jer samo takvo mjerenje je točno.



Slika 31 - ovisnost vrijednosti visine o referentnoj plohi

U geodeziji se najčešće koristi elipsoid ili geoid kao referentna ploha, a prema načinu određivanja visina razlikujemo apsolutne, relativne visine i visinske razlike.

Apsolutna visina je udaljenost točke od neke naše referentne plohe. Ako za referentnu plohu uzmemo srednju razinu mora zamišljenu kao da je produženu ispod kontinenata. Tada apsolutna visina pokazuje koliko je neka točka iznad ili ispod te razine. Takva se površina zove nivoploha mora i predstavlja osnovnu, početnu (nultu) površinu od koje se u geodeziji mjere visine, označava se slovom H . Za točke $P_1, P_2, \dots$ visine $H_1, H_2, \dots$ govore kolika je njihova visina u odnosu na more. Srednja razina mora određuje se dugotrajnim mjerenjem mareografa kako bi bila što točnija, a takva referentna ploha u geodeziji zapravo odgovara geoidu. Odnosno ploha geoida je određena srednjom razinom mora pomoću mareografa.

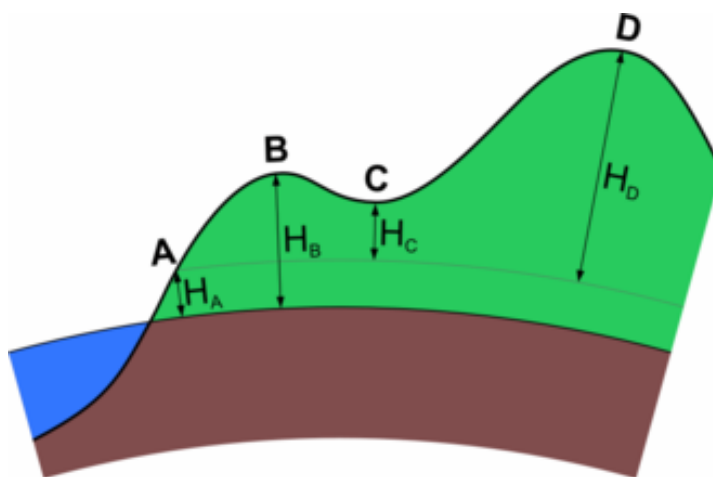


Slika 32 - apsolutna visina

Dok je relativna visina jednostavno udaljenost između dvije ili više točaka. Ona ne ovisi o apsolutnoj visini te točke jer nam ona pokazuje koliko su točke međusobno visinski udaljene.

Visinska razlika je razlika u visini dviju točaka i pokazuje koliko je jedna točka viša ili niža od druge.

Na primjer, relativna visina je visina neke točke u odnosu na odabranu točku na zemlji, a ne u odnosu na apsolutnu plohu. Na primjer, ako je škola stvarno na nadmorskoj visini od 5 m, ali uzmemo da je škola na 0 m, tada sve ostale visine mjerimo u odnosu na školu. Ako je bolnica stvarno na 8 m nadmorske visine, njezina relativna visina u odnosu na školu bit će 3 m. A visinska razlika između dvije točke je stvarna razlika u njihovim visinama i ona ostaje ista bez obzira na to koju referentnu točku ili plohu koristimo. Tako je visinska razlika između škole i bolnice uvijek 3 m.

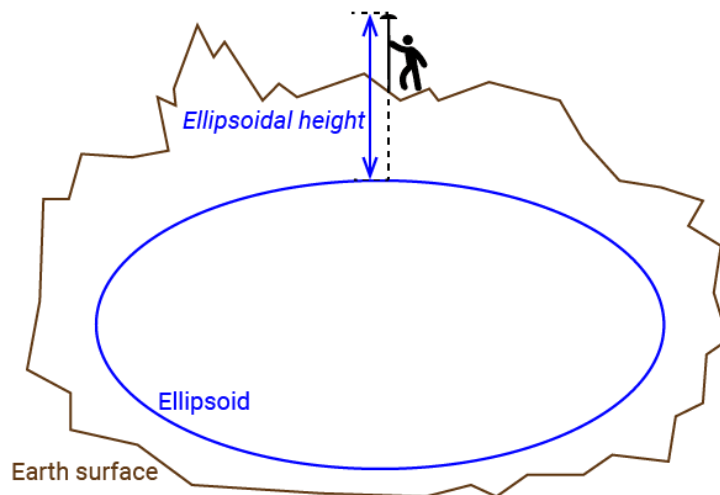


Slika 33 - H_A , H_B - apsolutna visina, H_C , H_D - relativna visina u odnosu na točku A

U geodeziji se najčešće koriste dvije osnovne vrste visina ovisno o tome od koje referentne plohe mjerimo, a to su elipsoidne i ortometrijske visine.

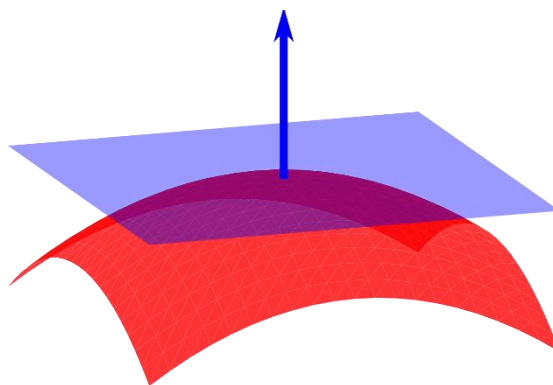
5.2. Elipsoidna visina

Elipsoidnu visinu još zovemo geodetska ili normalna visina i označavamo je slovom (**h**). Elipsoidna visina je visina koju dobivamo ako za referentnu plohu uzmemo elipsoid. To je udaljenost od referentnog elipsoida, mjerenu duž normale do neke točke na Zemlji.



Slika 34 - elipsoidna visina

Normalom zovemo pravac koji je okomit na površinu elipsoida u određenoj točki. Općenito visine uvijek moramo mjeriti okomito na bilo koju referentnu plohu jer kad bismo visinu mjerili pod nekim drugim kutom, dobili bismo dulju ili kraću vrijednost koja ne predstavlja stvarnu visinu. Elipsoid je matematička ploha koja ne postoji fizički na terenu. Kada stojimo na Zemljinoj površini mi ne znamo točno gdje se elipsoid nalazi ispod ili iznad nas. Zato se normala ne određuje mjerenjem, nego računanjem. Elipsoidne visine isključivo se temelji na elipsoidu i tako ne ovisi o ubrzanju sile teže (g).

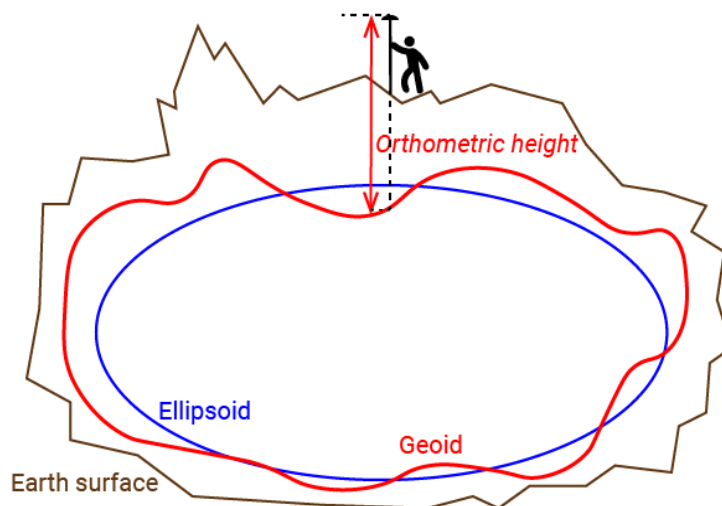


Slika 35 - smjer normale

Elipsoidna visina koristi se npr. u GPS mjerenjima. GPS uređaj tako izravno određuju položaj točke u odnosu na elipsoid, pa se kao rezultat mjerenja dobivaju upravo elipsoidne visine.

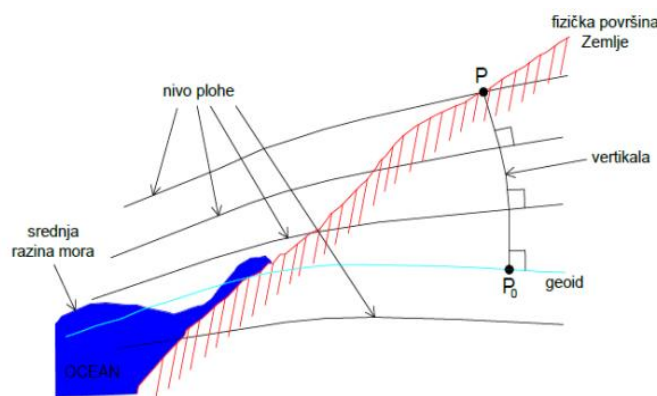
5.3. Ortometrijska visina

Ortometrijsku visinu ponekad se još zove i nadmorska visina i označavamo je slovom (**H**). Ortometrijska visina je visina koju dobivamo ako ovaj put za referentnu plohu uzmemo geoid. To je udaljenost od geoida, mjerena duž vertikalne ili ju još zovemo težišnica do točke na Zemljinoj površini.



Slika 36 - ortometrijska visina

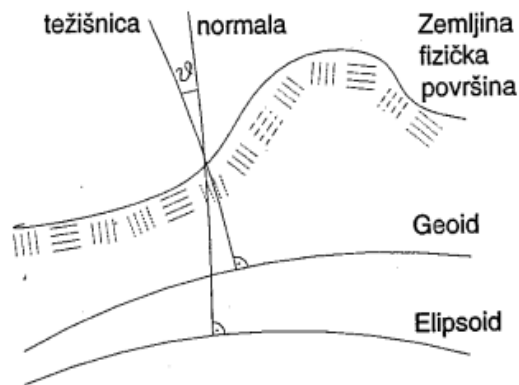
Geoid nije pravilna ploha, ali je sila teža u svakoj točki okomita na geoid. Zbog toga je vertikalna ispravan smjer za mjerenje visine jer se podudara sa smjerom sile teže u nekoj točki. Kako je geoid valovit, smjer težišnice, odnosno smjer sile teže, razlikuje se od mjesta do mjesta. Pošto se ortometrijske visine mjere u tom smjeru, one ovise o ubrzanju sile teže (g).



Slika 37 - smjer vertikalne / težišnice

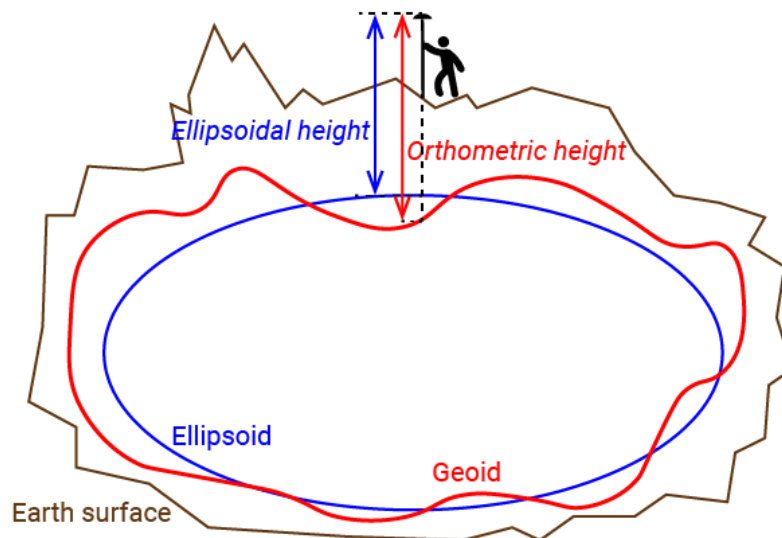
Rekli smo da geoid predstavlja srednju razinu mora. Zato kad čujemo da je neka točka npr. 100 metara iznad mora, misli se upravo na ortometrijsku (nadmorsku) visinu. Ortometrijske visine mjerimo kad želimo znati koliko je neka točka iznad ili ispod mora. Mjerimo ih zato što takve visine koristimo u stvarnom životu npr. u gradnji, na kartama...

Znamo da se mjerenja u geodeziji radi na stvarnoj Zemljinoj površini, ali za izračune ih moramo prebaciti (reducirati) na elipsoid. Elipsoid se određuje u odnosu na geoid, jer geoid predstavlja najrealniji oblik Zemlje. Tako se visine određuju duž normale na elipsoid, ali smjer normale nije isti kao smjer sile teže (vertikale). Zbog toga postoji razlika između elipsoidne i ortometrijske visine.



Slika 38 - razlika između težišnice i normale

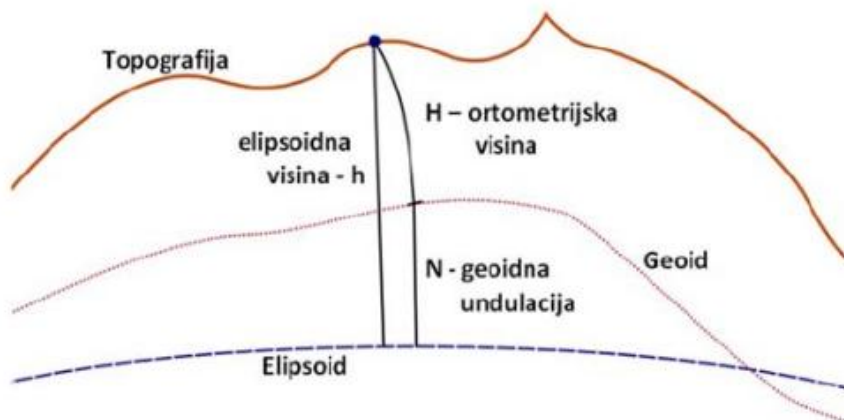
Ta razlika, odnosno udaljenost između elipsoida i geoida, zove se geoidna undulacija i ona povezuje elipsoidne visine s ortometrijskim.



Slika 39 - razlika između elipsoidne i ortometrijske visine

5.4. Geoidna undulacija

Geoidna undulaciju je razlika između elipsoidne i ortometrijske visine i označavamo ju sa slovom (N). Tako zbog geoidne undulacije postoji veza između elipsoidne i ortometrijske visine



Slika 40 - geoidna undulacija

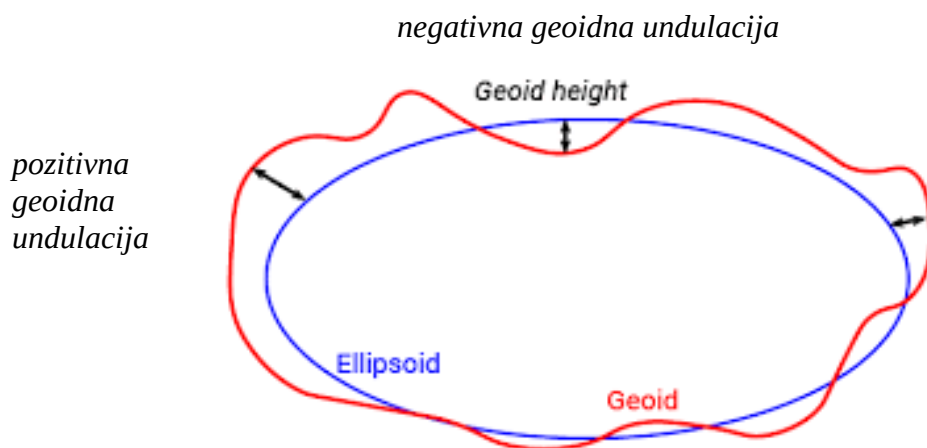
$$N = h - H$$

h - elipsoidna visina

H - ortometrijska visina

N - geoidna undulacija

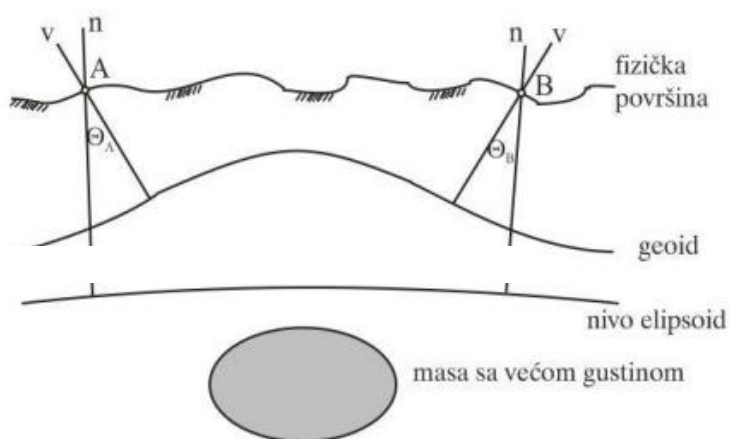
To je udaljenost između referentnog elipsoida i geoida, mjerena duž normale na elipsoid. Odnosno, geoidna undulacija pokazuje koliko je geoid u nekoj točki iznad ili ispod elipsoida. Tako geoidna undulacija nije svugdje jednaka zbog čega može imati pozitivnu ili negativnu vrijednost.



Slika 41 - pozitivna i negativna vrijednost geoidne undulacije

Ako se geoid nalazi iznad elipsoida onda je geoidna undulacija pozitivna ($N > 0$). To se događa u područjima gdje postoji neka dodatna masa (npr. guste stijene u Zemljinoj kori) što uzrokuje jaču gravitaciju.

Ako se geoid nalazi ispod elipsoida onda je geoidna undulacija negativna ($N < 0$). To se događa u područjima gdje ima manje mase, što uzrokuje slabiju gravitaciju.



Slika 42 - razlog izbočenju geoida na nekom području

Geoidnu undulaciju mjerimo zato što preko nje možemo povezati elipsoidnu i ortometrijsku visinu. Znači ona predstavlja vezu između geoida i elipsoida. Tako GNSS mjerenjima npr. GPS-om dobivamo elipsoidnu visinu (h) koja je određena u odnosu na elipsoid, a u praksi nam je potrebna nadmorska (ortometrijska) visina (H) koja se odnosi na geoid tj. srednju razinu mora. A rekli smo da geoidna undulacija povezuje te dvije visine ($h=H+N$) tako pomoću nje možemo prijeći s jedne vrste visine na drugu.

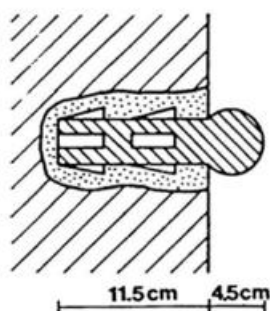
Znači geoidnu undulaciju koristimo kako bismo iz elipsoidne visine izračunali stvarnu nadmorsku visinu, koja se npr. koristi u gradnji, kartografiji... Geoidna undulacija nam je tako važna jer bez nje ne bi mogli GNSS visine pretvoriti u stvarne nadmorske visine.

Kako ćemo izmjeriti visine i dobiti geoidnu undulaciju objasniti ćemo u 6. i 7. poglavlju.

6. VISINSKI I KOORDINATNI SUSTAV

6.1. Reperi

Reper je trajno stabilizirana točka na terenu kojoj je precizno određena visina i približno položaj. Znači to je točka s određenom apsolutnom visinom (mjeri se u odnosu na srednju razinu mora) time repere smatramo visinskim geodetskim točkama. Glavna svrha samih repere je da pomoću njih tj. pomoću njihove poznate visine možemo odrediti visinu neke bliske točke. Reperi se uglavnom stabiliziraju u objekte, najčešće zgrade (visinski reperi) ili tlo (položajni reperi). Napravljeni su od metala, a mogu biti u obliku kugle ili pločice tj. reperi s rupicom. Svaki reper nakon stabilizacije dobiva položajni opis repere. To je dokument u kojem su napisani svi važni podaci vezani za taj reper poput: visine, koordinata, područja na kojem se nalazi, stanju i način stabilizacije repere (46. – 50. str.).



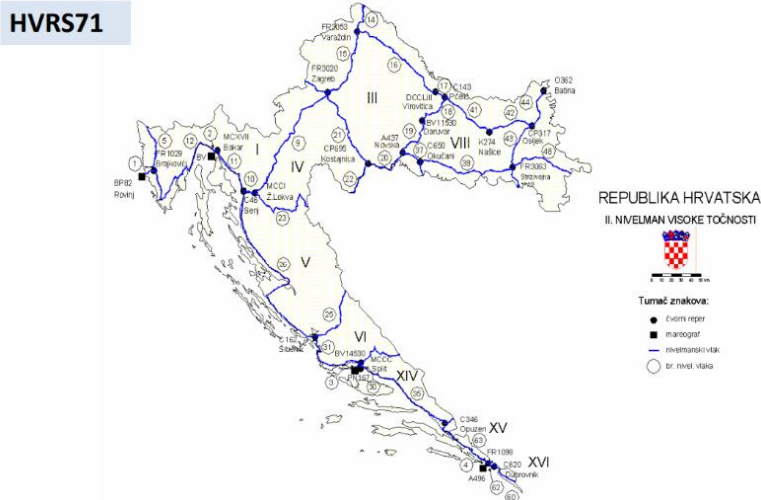
Slika 43 - stabiliziran reper

6.2. HTRS71

Reperi su međusobno povezani u nivelmansku mrežu. To je skup međusobno povezanih repere između kojih su izmjerene visinske razlike. Ta mreža je važna kako bi odredili visinski sustav. Visinski sustav je najjednostavnije rečeno temelj preko koje svi koristimo istu nultu (početnu) točku za mjerenje visine. Jer općenito uvijek kad mjerimo nešto ne samo visinu uvijek se pitamo koja nam je početna točka od koje mjerimo odnosno od koje referentne razine se mjere visine. Bez visinskog sustava nastao bi potpuni nesporednost i problemi pogotovo u gradnji objekata. Na primjer, ako bi se most gradio s dvije strane mora bez istog sustava mjerenja, dijelovi se možda ne bi nikada pravilno spojili. Znači visinski sustav omogućuje da svi koriste iste podatke i da rezultati budu međusobno usporedivi.

U Hrvatskoj službeni sustav za visine je Hrvatski visinski referentni sustav (HVR71). To je službeni način preko kojeg određujemo visine u državi jer HVR71 definira gdje je početna točka od kojeg svi mjerimo visine, a to je od srednje razine mora koja je određena mareografima. Pošto se visine mjere od srednje razine mora (kao geoid) HVR71 je povezan s geoidom, a ne s elipsoidom. Zbog toga visine u tom sustavu su ortometrijske visine (H).

Tako pomoću ovog sustava visine koje su izmjerene u različitim dijelovima države mogu se usporediti jer su međusobno usklađene tim sustavom. Na primjer, ako u Dubrovniku i Zagrebu izmjerimo visinu pomoću HVRS-a, rezultati se mogu usporediti jer možemo reći da “govore istim jezikom”.

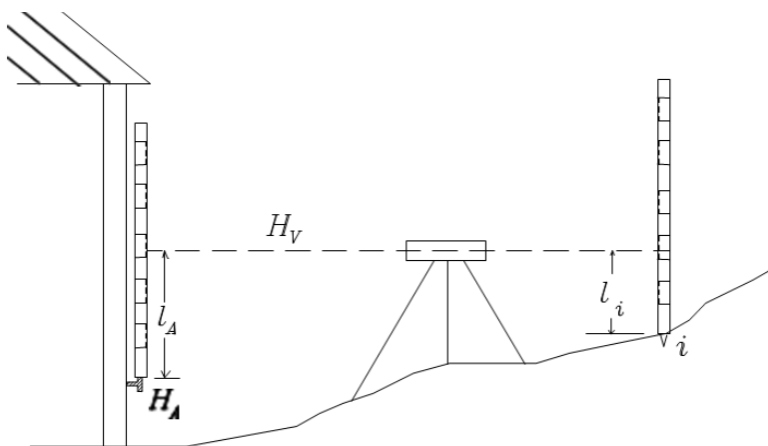


Slika 44 - HVRS71

6.3. Metode određivanja visina

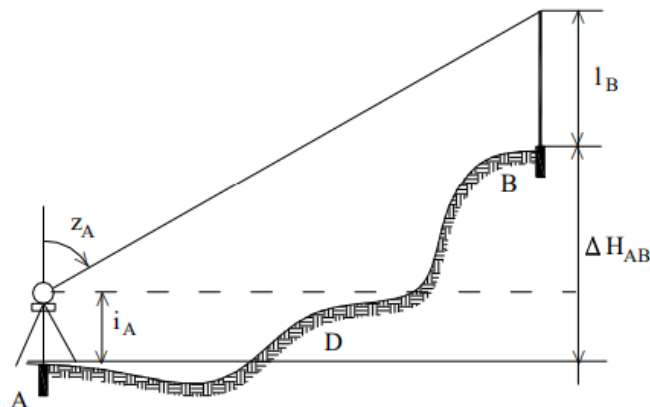
U geodeziji visine se najčešće određuju pomoću tri načina: geometrijskim nivelmanom, trigonometrijskim nivelmanom i pomoću GPS-a. Jedna od najvažnijih metoda za određivanje visina jest nivelman. To je postupak u kojem se najprije određuje visinska razlika kako bi dobili visinu s obzirom na referentnu plohu. A ako nam je poznata visina lako možemo odrediti i geoidnu undulaciju.

Geometrijski nivelman nam daje najpreciznije visine. Temelji se na korištenju instrumenta nivelira i nivelmanske letve. Nivelir je najjednostavniji geodetski instrument kojim određujemo visinsku razliku pomoću horizontalne vizure. Zato se nivelir postavlja tako da njegova vizurna os bude potpuno horizontalna. Zatim se očitavaju visine na letvama postavljenima na dvije točke čiju visinsku razliku želimo odrediti. Razlika između očitavanja na zadnjoj i prednjoj letvi daje visinsku razliku između tih točaka. Geometrijski nivelman se inače koristi kada su nam potrebne velike preciznosti u gradnji npr. cesta, mostova...



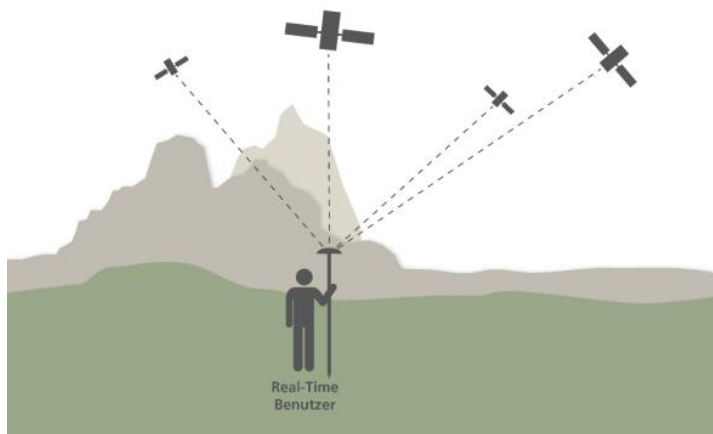
Slika 45 - geometrijski nivelman

Dok **trigonometriji nivelman** određuje visinsku razliku pomoću mjerenja kutova i udaljenosti. Koriste se instrumenti kao što je teodolit ili totalna stanica. Kako bi dobili visinsku razliku pomoću kuta i udaljenosti između točaka koristimo trigonometrijske formule. Ova metoda je manje preciznija nego geometrijski nivelman, ali je praktičnija ako imamo veće udaljenosti ili nepristupačan teren.



Slika 46 - trigonometrijski nivelman

Visine još možemo odrediti pomoću **GPS-a** koji se temelji se na satelitskim mjerenjima. Glavna svrha GPS-a je što on određuje položaj točke u prostoru, uključujući i visinu. Zato se GPS ne smatra nivelmanom jer ne mjeri visinsku razliku nego određuje apsolutni položaj točke pomoću satelita. Prednost ove metode je što jako lako možemo odrediti visine u kratkom vremenu, ali problem je što su GPS visine manje precizne od nivelmanskih pa se te visine moraju dodatno prilagođavati sustavima (npr. HVR71).

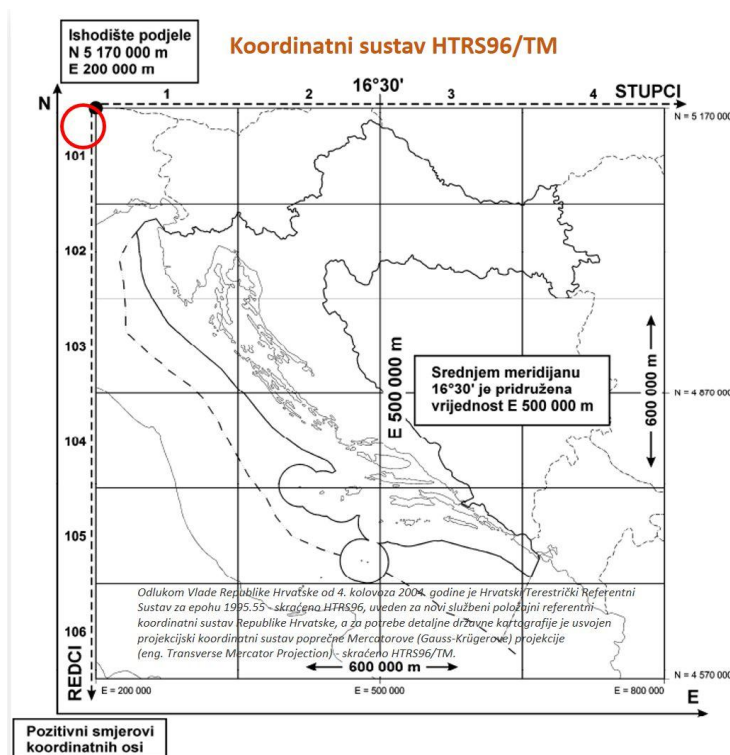


Slika 47 - GPS

Iako prije pojave GPS-a, reperi su bili jedini način za precizno određivanje visina i položaja. Geodeti su morali odlaziti na teren, povezivati točke i prenositi visinu s jednog repera na drugi pomoću mjerenja. Danas GPS-om možemo odrediti visine puno brže nego bilo kojom drugom metodom, ali u slučaju da nam netko isključi GPS ne bi došlo do potpunog “kolapsa”, nego bi se morali oslanjati na klasične metode nivelmana i sustavi s reperima jer oni i dalje postoje i mogu preuzeti njegovu ulogu kada je potrebno.

6.4. HTRS96

Rekli smo da GPS ne određuje samo visinu nego određuje položaj točke u prostoru. Tako se u Hrvatskoj za to koristi Hrvatski Terestrički Referentni Sustav 1996 (HTRS96/TM). To znači da je to službeni koordinatni sustav u Hrvatskoj koji omogućava da se svakoj točki na Zemlji odredi njezin točan položaj, odnosno da joj se dodijele koordinate.



Slika 48 - HTRS96/TM

Kako bi se to postiglo prvo je trebalo definirati oblik Zemlje. Tako HTRS96 koristi elipsoid GRS80. Drugo, trebalo je definirati gdje je “nulta točka” tj. geodetski datum tako je HTRS96 povezan s europskim datumom ETRS89, što znači da je usklađen s cijelom Europom.

I treće, trebalo je još definirati kako zapisujemo položaj. U HTRS96/TM, a to možemo na dva načina.

Jedan je prostorni elipsoidni (geodetski) zapis što znači da je određen pomoću tri koordinate - 3D. Određen je preko geodetska širine (φ), geodetske dužine (λ) i geodetske visine (h) koja zapravo predstavlja elipsoidnu visinu (udaljenost od elipsoida do točke). Ovaj zapis opisuje položaj na elipsoidu tako da nam govori gdje se nalazimo na Zemlji u odnosu na ekvator i početni meridijan.

Drugi i službeni način je ravninski zapis to znači da je položaj točke određen pomoću dvije koordinate - 2D. Ovdje koristimo E (istočnu koordinatu) i N (sjevernu koordinatu). Taj zapis nastaje tako da preslikamo zakrivljenu Zemlju na ravnu kartu, što se zove kartografska projekcija. U Hrvatskoj se koristi projekcija HTRS96/TM (transverzalna Mercatorova projekcija) pri čemu oznaka TM upućuje na način zapisa koordinata pomoću E, N i H. E koordinata je projekcija ekvatora, N projekcija srednjeg meridijana, a H visina.

HTRS96/TM opisuje položaj u horizontalnom smislu (x i y). Visina (H) se ne definira tim sustavom nego posebnim visinskim sustavom, kao što je HVRS71. Međutim one se često zajedno koriste pa se za neku točku možemo reći da ima E , N i H gdje E i N dolaze iz HTRS96/TM, a H iz visinskog sustava. Pošto visina H dolazi iz HVRS71 čije su visine određene geoidom, H predstavlja ortometrijsku visinu.

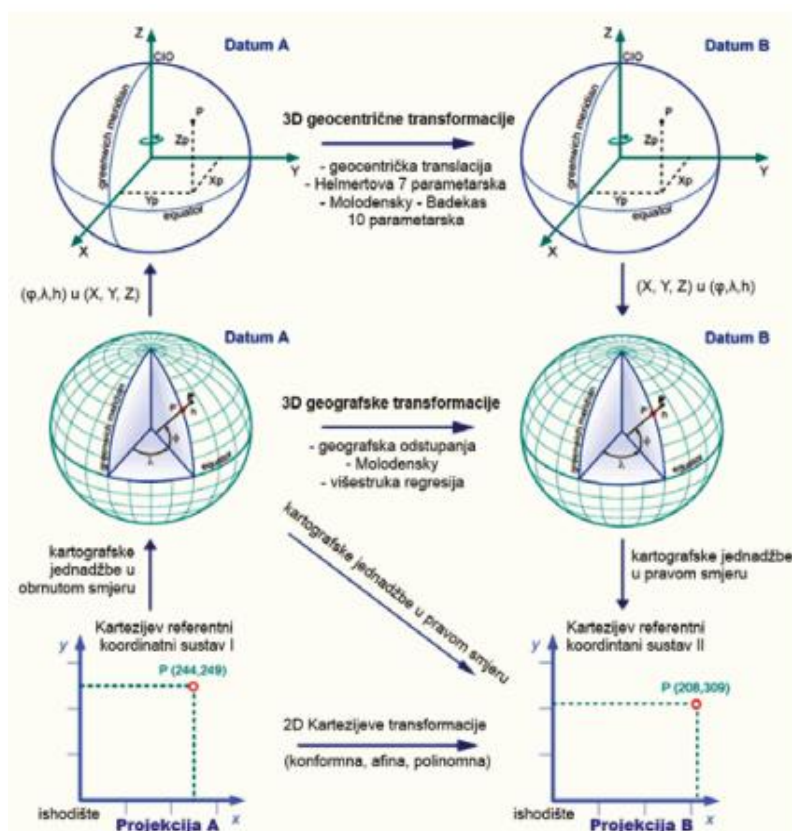
Znači glavna razlika između ova dva zapisa je u načinu prikaza: φ i λ opisuju položaj na zakrivljenoj površini Zemlje i visina h predstavlja elipsoidnu visinu, dok E i N predstavljaju položaj u ravninskom sustavu (projekciji karte) i visina H predstavlja ortometrijsku visinu.

6.5. Konverzija i transformacija

Kako bi mogli prelaziti iz jednog zapisa u drugi, koristi se postupak koji se zove konverzija (pretvorba) koordinata. Konverzija omogućava pretvaranje koordinata iz jednog koordinatnog sustava u drugi s istim datumom. Na primjer, ako želimo preći iz geodetskog koordinatnog sustava (φ , λ , h) u ravninu poprečne Mercatorove projekcije HTRS96/TM (E , N , H) koristimo konverziju.

Postoji još transformacija, a to je postupak koji pretvaranje koordinate iz jednog koordinatnog sustava u drugi s različitim datumom odnosno sa skroz drugačijeg referentnog sustava, a ne samo zapisa kao što je bilo u konverziji. Na primjer, iz Gauss Krugerove projekcije HDKS/GK (y , x) u ravninu poprečne Mercatorove projekcije HTRS96/TM (E , N).

Ali oba procesa je moguće napraviti preko aplikacije T7D.



Slika 49 - transformacije i konverzija

7. PRAKTIČNI DIO

7.1. Pronalaženje podataka

Prije nego što smo izašli na teren bilo je potrebno napraviti par stvari. Prvo što smo napravili je putem sustava STGO (stalne točke geodetske osnove) našli postojeće repere na području koje smo odabrali za rad. U pretraživanju smo odabrali da želimo prikaz visinskih točaka, odnosno repere koji su postavljeni na objektima i za koje postoje dostupni podaci, a kao područje istraživanja odabrali smo Dubrovnik.

Slika 50 - sustav STGO

Nakon što smo pregledali kartu odabrali smo oko 10 repere te smo za svaki od njih preuzeli položajni opis. Taj opis nam je važan kako bismo ih lakše našli na terenu, ali i zato što sadrži njihove poznate visine koje su nam kasnije bili potrebni za računanje (46. – 50. str.).



Slika 51 - repere koji su se mjerili prikazani u ArcGIS-u

Sljedeći korak bio je izlazak na teren radi provjere. Tijekom tog obilaska pokušali smo naći sve odabrane repere i provjeriti nalaze li se još uvijek na svojim mjestima. Također smo procjenjivali jesu li pogodni za mjerenje, odnosno postoji li dovoljno prostora za postavljanje instrumenta i letve te možemo li u njihovoj blizini odrediti dodatne točke za mjerenje visine. Iako smo na terenu pronašli većinu repere, nisu svi bili pogodni za rad, pa smo na kraju odabrali pet međusobno bliskih repere koji su zadovoljavali uvjete.



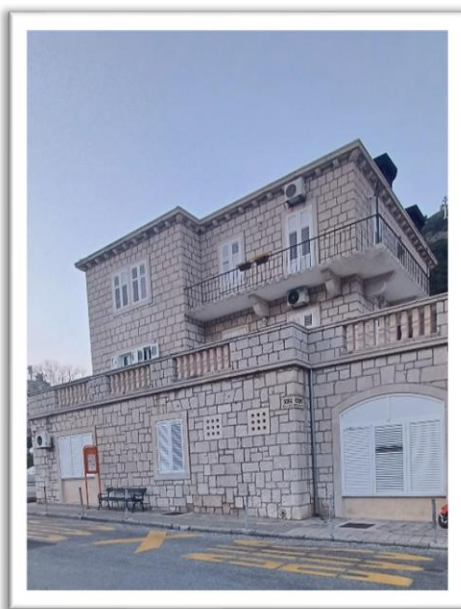
Slika 52 - 1. točka - slavica



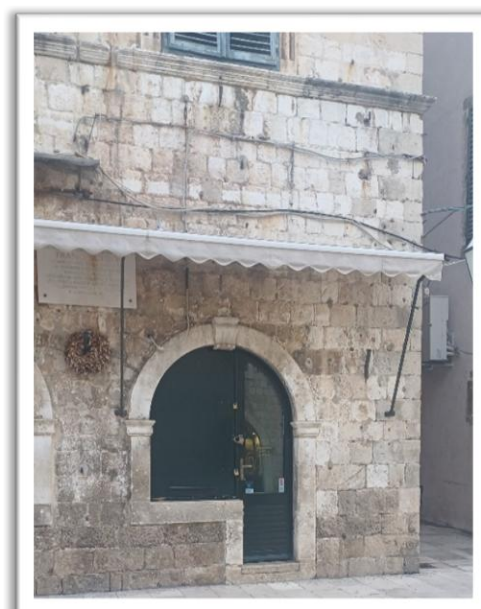
Slika 53 - 2. točka - pošta



Slika 54 - 3. točka - pile



Slika 55 - 4. točka - stanica



Slika 56 - 5. točka - stradun

7.2. Izmjera

Nakon pripreme i odabira repera, izašli smo na teren kako bismo obavili mjerenje. Cilj zadatka bio je odrediti geoidnu undulaciju. To smo planirali napraviti tako da najprije izmjerimo visinsku razliku između repera i odabrane točke. Na temelju toga izračunat ćemo ortometrijsku visinu te točke, a zatim ćemo pomoću transformacije tj. konverzije odrediti bi smo njezinu elipsoidnu visinu. Kada sve to dobijemo lako možemo izračunati geoidnu undulaciju kao razlika između te dvije visine. Rezultate koje smo dobili dodatno ćemo provjeriti s GPS mjerenjem.

Za rad na terenu bili su nam potrebni sljedeći instrumenti: nivelir (koristili smo optički – građevinski nivelir DSZ32X) , nivelmanska letva, stativ, GPS uređaj (koristili smo STONEX S900A), štap za GPS te marker za označavanje točaka. Za izvođenje mjerenja bile su potrebne najmanje tri osobe.

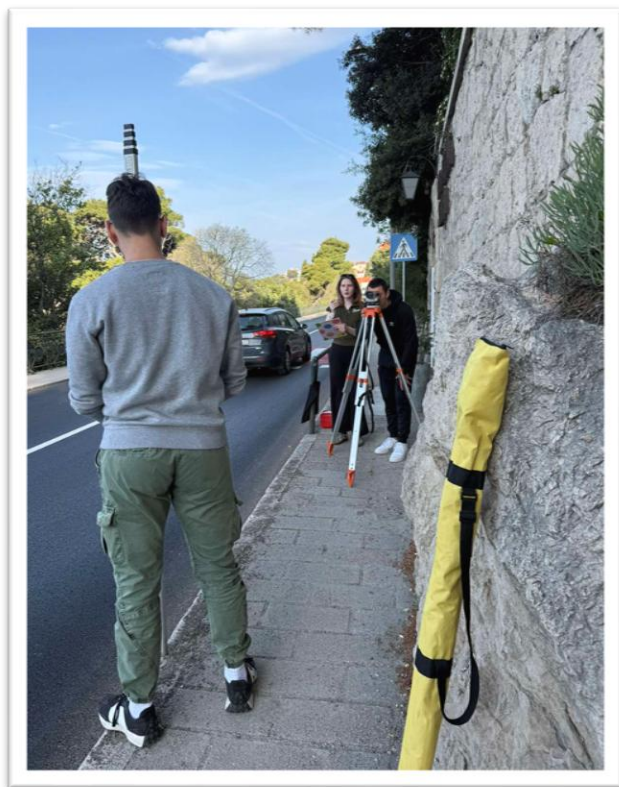


Slika 57 - oprema: nivelir, stativ, letva i GPS

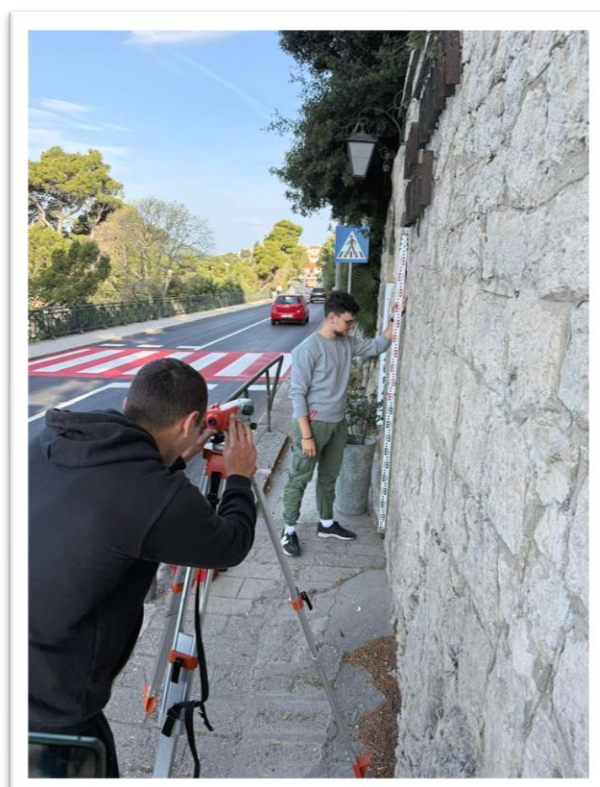
Prvu točku označili smo kraj Kina Slavica na području Boninova. Kad smo došli na to područje prvo smo pravilno postavili nivelir na stativ, vodeći računa da bude stabilan i horizontiran. Instrument smo postavili na udaljenosti od oko dva metra od repera.

Na reper (označen kao R1) postavili smo letvu u vertikalnom položaju te smo kroz nivelir očitali vrijednost, što predstavlja očitavanje zadnje letve. Nakon toga odabrali smo novu točku kojoj smo željeli odrediti visinu i označili je kao T1. Ta točka je odabrana tako da bude približno jednako udaljena od instrumenta kao i reper, što je važno zbog metode niveliranja iz sredine. Također je bilo važno da vizurna linija instrumenta bude horizontalna.

Na točku T1 postavili smo letvu i očitali njezinu vrijednost, što predstavlja očitavanje prednje letve. Nakon toga smo, radi provjere točnosti, ponovili mjerenje u suprotnom smjeru, odnosno ponovno očitali vrijednost na točki T1, a zatim se vratili na reper R1 i ponovno očitali vrijednost. Sva mjerenja obavljena su s istog stajališta instrumenta.



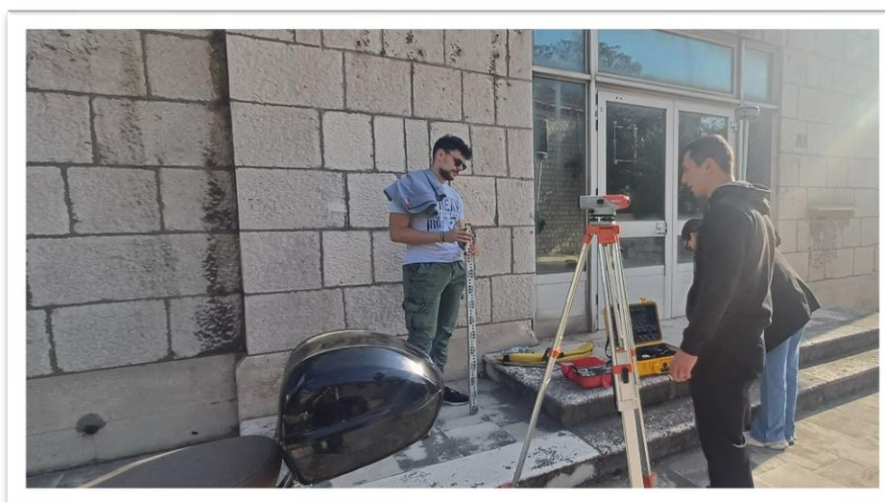
Slika 58 - mjerenje točke T1



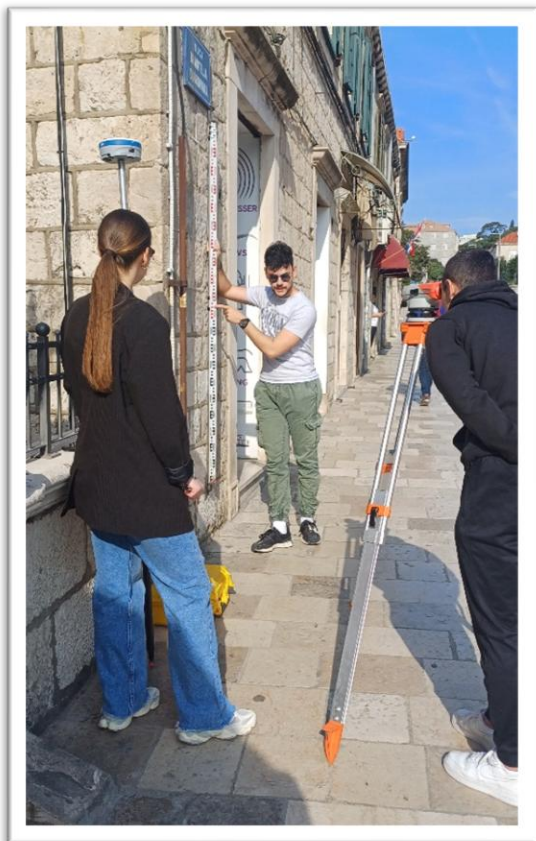
Slika 59 - mjerenje repera R1

Nakon nivelmanskog mjerenja, GPS uređajem smo izmjerili točku T1 kako bismo mogli usporediti rezultate dobivene različitim metodama.

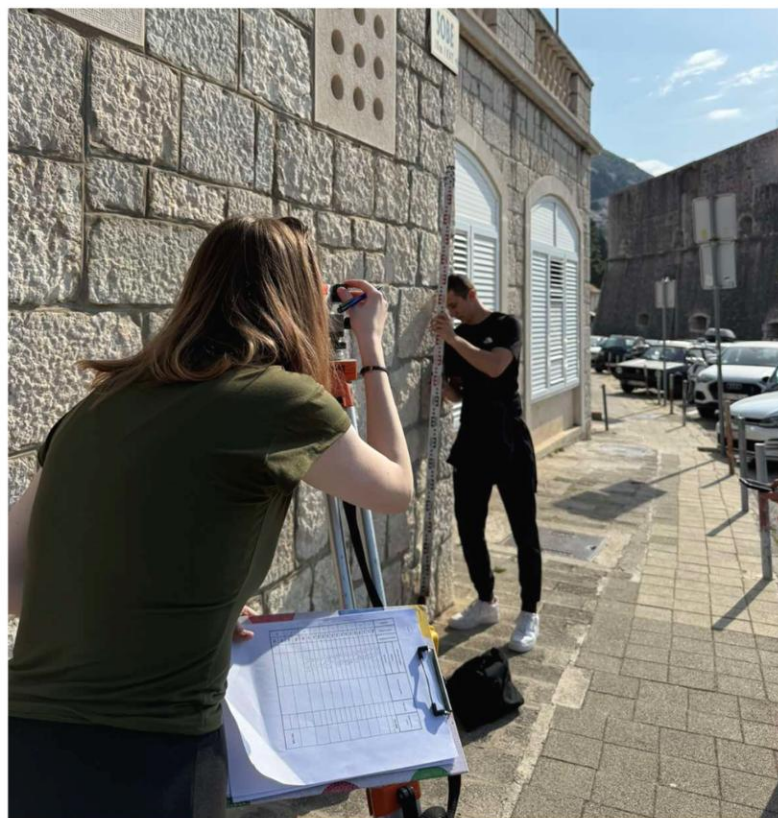
Isti postupak ponovili smo i za ostale točke (T2, T3, T4 i T5). Na taj način dobili smo potrebne podatke za izračun visina i određivanje geoidne undulacije.



Slika 60 - mjerenje 2. točke - pošta



Slika 61 - mjerenje 3. točke - pile



Slika 62 - mjerenje 4. točke - stanica



Slika 63 - mjerenje 5. točke - stradun

7.3. Obrada podataka

Nakon što smo završili s terenskim djelom moramo sad obradi podatke. Prvo smo analizirali očitavanja dobivena na letvi. Važno je reći da su sva očitavanja na letvi izražena u decimetrima, koje smo kasnije pretvarali u metre.

Tako na reperu R1 dobili smo dva očitavanja. Prvo očitavanje iznosilo je 12,30 dm, a ponovljeno mjerenje 12,29 dm. Kako bismo smanjili utjecaj pogreške, izračunali smo srednju vrijednost:

$$l = \frac{12,29 + 12,30}{2} = 12,295 \text{ dm}$$

Isti postupak napravili smo i za točku T1. Prvo očitavanje iznosilo je 14,72 dm, a drugo 14,74 dm, a srednja vrijednost iznosi:

$$l = \frac{14,72 + 14,74}{2} = 14,73 \text{ dm}$$

Nakon toga izračunali smo visinsku razliku između repera i točke T1. Visinska razlika (Δh) dobiva se tako da se od očitavanja zadnje letve (reper) oduzme očitavanje prednje letve (točka):

$$\Delta h = 12,295 - 14,73 = -2,435 \text{ dm}$$

Pretvaranjem u metre dobili smo:

$$\Delta h = -0,2435 \text{ m}$$

Negativan predznak znači da se točka T1 nalazi niže od repera R1. To je logično jer ako je očitavanje na letvi veće to znači da je točka niža, a ako je manje, točka je viša.

Onda smo visinu repera R1 uzeli iz njegovog položajnog opisa koja iznosi:

$$H_{r1} = 48,0507 \text{ m}$$

Kako bismo dobili visinu točke T1, koristimo formulu:

$$H_{t1} = H_{r1} + \Delta h$$

$$H_{t1} = 48,0507 - 0,2435 = \mathbf{47,8072\ m}$$

Dobivena vrijednost predstavlja ortometrijsku visinu točke T1.

Isti postupak ponovili smo za sve ostale točke kako bismo dobili njihove visine.

stajalište	broj točke	očitanje na letvi [l] [dm]		srednja vrjednost [dm]	visinska razlika [Δh = lz – lp] [m]	visina repera [Hr]	visina točke [Ht = Hr + Δh]
1. slavica	R1	12,30		12,295	-0,2435	48,0507	
		12,29					
	T1	14,72		14,73			47,8072
		14,74					
2. pošta	R2	11,22		11,225	-0,4355	16,4813	
		11,23					
	T2	15,57		15,580			16,0458
		15,59					
3. pile	R3	9,32		9,325	-0,6675	11,2447	
		9,33					
	T3	16,00		16,000			10,5772
		16,00					
4. stanica	R4	12,64		12,650	-0,18	19,7109	
		12,66					
	T4	14,45		14,450			19,5309
		14,45					
5. stradun	R5	9,35		9,360	-0,532	3,4045	
		9,37					
	T5	14,68		14,680			2,8725
		14,68					

Slika 64 - tablica visina točaka dobivenih putem geometrijskog nivelmana

7.4. Izračun geoidne undulacije

Kako bismo odredili geoidnu undulaciju, bila nam je potrebna još i elipsoidna visina. Nju smo dobili pomoću aplikacije T7D. U aplikaciju smo unijeli broj točke i izračunatu ortometrijsku visinu. Kao ulazni i izlazni sustav odabrali smo HTRS96 te smo napravili konverziju koordinata (E, N, H) u geodetski oblik (φ , λ , h) i na taj način dobili smo elipsoidnu visinu.

br. točke	E	N	H	φ	λ	h
1.	631036.058	4724085.979	47.8072	42°38'43" 200201	18°05'52" 726868	88.7919
2.	631522.775	4723807.725	16.0458	42°38'31" 586788	18°06'13" 854887	57.0157
3.	631632.374	4723751.459	10.5772	42°38'31" 996510	18°06'18" 617577	51.5442
4.	632151.889	4723777.376	19.5309	42°38'32" 516023	18°06'41" 437020	60.5075
5.	631910.010	4723666.590	2.8725	42°38'29" 076007	18°06'30" 730186	43.8337

Slika 65 - konverzija koordinata putem aplikacije T7D

Za točku T1 dobili smo:

$$H = 47,8072 \text{ m} \quad \gg \quad h = 88,7919 \text{ m}$$

Geoidnu undulaciju izračunali smo kao razliku elipsoidne i ortometrijske visine:

$$N = h - H$$

$$N = 88,7919 - 47,8072 = 40,9847 \text{ m}$$

br. točke	elipsoidna visina [h]	ortometrijska visina [H]	geoidna undulacija [N = h - H]
T1	88,7919	47,8072	40,9847
T2	57,0157	16,0458	40,9699
T3	51,5442	10,5772	40,967
T4	60,5075	19,5309	40,9766
T5	43,8337	2,8725	40,9612

Slika 66 - geoidna undulacija dobivenim putem geometrijskog nivelmana

7.5. Usporedba geoidne undulacije dobivenim različitim metodama

Na kraju smo rezultate provjerili pomoću GPS-a. GPS nam izravno daje i elipsoidnu i ortometrijsku visinu.

br. točke	φ	λ	h	područje
1.	42,38432002172	18,05527268588	88,791	slavica
2.	42,38338867916	18,06138548832	57,041	pošta
3.	42,38319965048	18,06186175836	51,570	pile
4.	42,38325160376	18,06414370380	60,526	stanica
5.	42,38290760240	18,06307301784	43,803	stradun

Slika 67 - elipsoidni (geodetski) zapis

br. točke	E	N	H	područje
1.	631036,058	4724085,979	47,806	slavica
2.	631522,775	4723807,725	16,046	pošta
3.	631632,374	4723751,459	10,575	pile
4.	632151,889	4723777,376	19,531	stanica
5.	631910,010	4723666,590	2,878	stradun

Slika 68 - ravninski zapis

Pa smo jednostavno oduzeli te vrijednosti i ponovno dobili geoidnu undulaciju. Kad smo usporedili podatke dobivenih geometrijskim nivelmanom i GPS-om vidimo da razlike nisu velike i kreću se oko ± 5 cm, što potvrđuje točnost naših mjerenja.

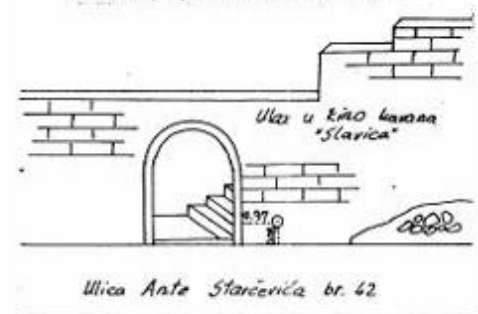
br. točke	elipsoidna visina [h]	ortometrijska visina [H]	geoidna undulacija [N = h - H]
T1	88,791	47,806	40,985
T2	57,041	16,046	40,995
T3	51,57	10,575	40,995
T4	60,526	19,531	40,995
T5	43,803	2,878	40,925

Slika 69 - geoidna undulacija dobivenim putem GPS-a

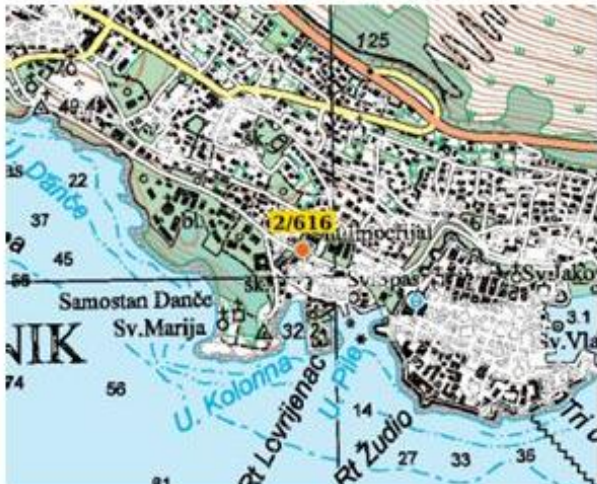
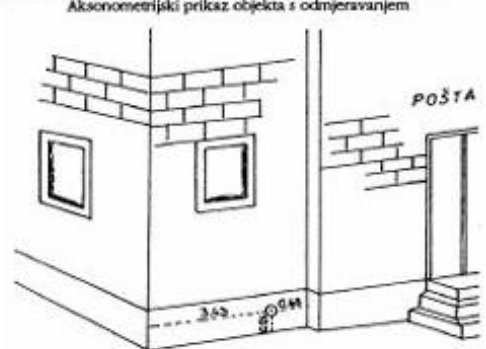
Na taj način dobili smo vrijednost geoidne undulacije za prvu točku.. Rezultati pokazuju da se na području Dubrovnika geoidna undulacija kreće približno oko 49,9 m.

7.6. Položajni opisi repera koje smo mjerili

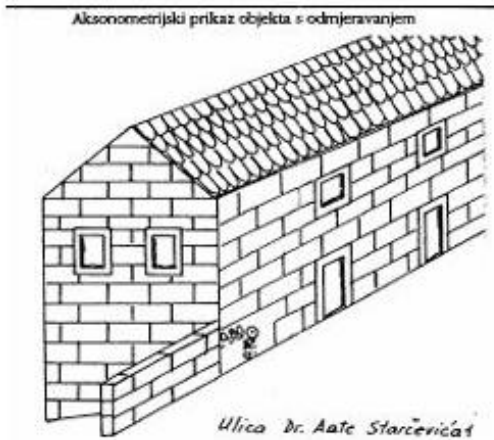
Reper R1 – kino slavica

ID: 1007711 BROJ: 6/616 RED: TNPT/GN VRSTA: Niv. poligon XV			Područni ured: PUK DUBROVNIK Ispostava: DUBROVNIK K.O.: DUBROVNIK Naselje: DUBROVNIK					
Kopija karte 1:25 000 s ucrtanim položajem točke: 			Način stabilizacije: Horizontalno ugrađen reper u objekt, promjera 6 cm, oznaka visine je rupica 					
Detaljna skica opisa položaja točke: Alsonometrijski prikaz objekta s odmjeraivanjem 			Fotografija točke: 					
HTRS96/ETRS89			HTRS96/TM		HVRS71	HDKS/GK		Trst
ϕ [° ' "]	λ [° ' "]	h [m]	E [m]	N [m]	H [m]	y [m]	x [m]	H [m]
			631004.00	4724101.00	48.0507			48.3240
Napomena:								
Pristup:								
Reper sa glavom ukopan u zid na ulozu u kino "Slavica"								
Revizija:	Pronađena	Oštećena	Uništena	GNSS pogodna	Ocjena	Službenik		Datum
	DA	BP	BP	BP	5	Matko Perović; Petar Kovačević		24.04.2006.

Reper R2 – pošta

ID: 1007724 BROJ: 2/616 RED: TNPT/GN VRSTA: Niv. poligon XV			Područni ured: PUK DUBROVNIK Ispostava: DUBROVNIK K.O.: DUBROVNIK Naselje: DUBROVNIK					
Kopija karte 1:25 000 s ucrtanim položajem točke: 			Način stabilizacije: Horizontalno ugrađen reper u objekt, promjera 6 cm, oznaka visine je rupica 					
Detaljna skica opisa položaja točke: Aksonometrijski prikaz objekta s odnjeravanjem  <i>Ul. Ante Starčevića br. 2</i>			Fotografija točke: 					
HTRS96/ETRS89			HTRS96/TM		HVRS71	HDKS/GK		Trst
φ [° ' '']	λ [° ' '']	h [m]	E [m]	N [m]	H [m]	y [m]	x [m]	H [m]
			631519.00	4723810.00	16.4813			16.7520
Napomena:								
Pristup:			Reper sa glavom ukopan u zgradi "Pošte" na Pilama					
Revizija:		Pronađena	Oštećena	Uništena	GNSS pogodna	Ocjena	Službenik	
		DA	BP	BP	BP	5	Matko Perović; Petar Kovačević	
							Datum	
							05.05.2006.	

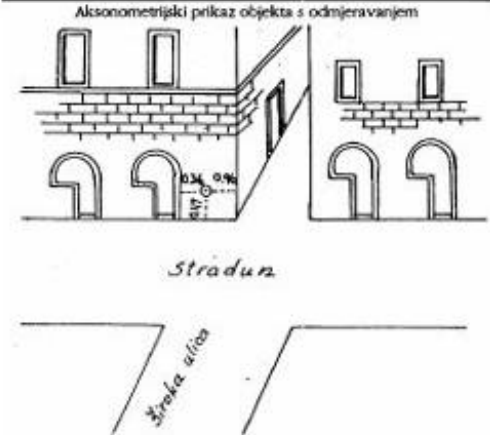
Reper R3 – pile

ID: 1007731 BROJ: 1/616 RED: TNPT/GN VRSTA: Niv. poligon XV			Područni ured: PUK DUBROVNIK Ispostava: DUBROVNIK K.O.: DUBROVNIK Naselje: DUBROVNIK																													
Kopija karte 1:25 000 s ucrtanim položajem točke: 			Način stabilizacije: Horizontalno ugrađen reper u objekt, promjera 6 cm, oznaka visine je rupica 																													
Detaljna skica opisa položaja točke: Aksonometrijski prikaz objekta s odmjeračanjem 			Fotografija točke: 																													
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">HTRS96/ETRS89</th> <th colspan="2">HTRS96/TM</th> <th>HVRS71</th> <th colspan="2">HDKS/GK</th> <th>Trst</th> </tr> <tr> <th>φ [° ' '']</th> <th>λ [° ' '']</th> <th>h [m]</th> <th>E [m]</th> <th>N [m]</th> <th>H [m]</th> <th>y [m]</th> <th>x [m]</th> <th>H [m]</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>631625.00</td> <td>4723752.00</td> <td>11.2447</td> <td></td> <td></td> <td>11.5170</td> </tr> </tbody> </table>			HTRS96/ETRS89			HTRS96/TM		HVRS71	HDKS/GK		Trst	φ [° ' '']	λ [° ' '']	h [m]	E [m]	N [m]	H [m]	y [m]	x [m]	H [m]				631625.00	4723752.00	11.2447			11.5170			
HTRS96/ETRS89			HTRS96/TM		HVRS71	HDKS/GK		Trst																								
φ [° ' '']	λ [° ' '']	h [m]	E [m]	N [m]	H [m]	y [m]	x [m]	H [m]																								
			631625.00	4723752.00	11.2447			11.5170																								
Napomena:																																
Pristup:			Reper sa glavom ukopan u kuću na Pilama (ul. A. Starčevića 1)																													
Revizija:			Pronađena	Oštećena	Uništena	GNSS pogodna	Ocjena	Službenik	Datum																							
			DA	BP	BP	BP	5	Matko Perović; Petar Kovačević	17.05.2006.																							

Reper R4 – stanica

ID: 1007736 BROJ: 21/616 RED: TNPT/GN VRSTA: Niv. poligon XV			Područni ured: PUK DUBROVNIK Ispostava: DUBROVNIK K.O.: DUBROVNIK Naselje: DUBROVNIK																													
Kopija karte 1:25 000 s ucrtanim položajem točke: 			Način stabilizacije: Horizontalno ugrađen reper u objekt, promjera 6 cm, oznaka visine je rupica 																													
Detaljna skica opisa položaja točke: Altimetrijski prikaz objekta s odnjeravanjem 			Fotografija točke: 																													
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">HTRS96/ETRS89</th> <th colspan="2">HTRS96/TM</th> <th>HVRS71</th> <th colspan="2">HDKS/GK</th> <th>Trst</th> </tr> <tr> <th>ϕ [° ' '']</th> <th>λ [° ' '']</th> <th>h [m]</th> <th>E [m]</th> <th>N [m]</th> <th>H [m]</th> <th>y [m]</th> <th>x [m]</th> <th>H [m]</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>632150.00</td> <td>4723776.00</td> <td>19.7109</td> <td></td> <td></td> <td>19.9820</td> </tr> </tbody> </table>			HTRS96/ETRS89			HTRS96/TM		HVRS71	HDKS/GK		Trst	ϕ [° ' '']	λ [° ' '']	h [m]	E [m]	N [m]	H [m]	y [m]	x [m]	H [m]				632150.00	4723776.00	19.7109			19.9820			
HTRS96/ETRS89			HTRS96/TM		HVRS71	HDKS/GK		Trst																								
ϕ [° ' '']	λ [° ' '']	h [m]	E [m]	N [m]	H [m]	y [m]	x [m]	H [m]																								
			632150.00	4723776.00	19.7109			19.9820																								
Napomena:																																
Pristup:			Reper sa glavom ukopan u zgradu na Pločama kraj parkinga "Žičara"																													
Revizija:			Pronađena	Oštećena	Uništena	GNSS pogodna	Ocjena	Službenik	Datum																							
			DA	BP	BP	BP	5	Matko Perović; Petar Kovačević	25.04.2006.																							

Reper R5 – stradun

ID: 1007734 BROJ: 130/616 RED: TNPT/GN VRSTA: Niv. poligon XV			Područni ured: PUK DUBROVNIK Ispostava: DUBROVNIK K.O.: DUBROVNIK Naselje: DUBROVNIK					
Kopija karte 1:25 000 s ucrtanim položajem točke: 			Način stabilizacije: Horizontalno ugrađen reper u objekt, promjera 6 cm, oznaka visine je rupica 					
Detaljna skica opisa položaja točke: Aksonometrijski prikaz objekta s odmjerenjem 			Fotografija točke: 					
HTRS96/ETRS89			HTRS96/TM		HVRS71	HDKS/GK		Trst
φ [° ' '']	λ [° ' '']	h [m]	E [m]	N [m]	H [m]	y [m]	x [m]	H [m]
			631907.00	4723672.00	3.4045			3.6790
Napomena:								
Pristup:			Reper sa glavom ukopan u kuću na Stradunu kod Antuninske ulice					
Revizija:	Pronađena	Oštećena	Uništena	GNSS pogodna	Ocjena	Službenik		Datum
	DA	BP	BP	BP	5	Matko Perović; Petar Kovačević		02.05.2006.

8. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu obrađena je tema geoidne undulacije i njezine važne uloge u određivanju visina. Kroz teorijski dio objašnjeni su osnovni pojmovi poput sile teže, modela Zemlje i vrsta visina kako bi se bolje shvatio odnos između geoida i elipsoida, a samim time i geoidne undulacije.

Iz analize se vidi da zbog nepravilnog oblika Zemlje nije moguće koristiti samo jedan model za geodetska mjerenja. Upravo zato geoidna undulacija ima važnu ulogu jer povezuje matematički model Zemlje s njezinim stvarnim fizikalnim oblikom.

U praktičnom dijelu rada napravljena je izmjera, obrada podataka i izračun geoidne undulacije, pri čemu su dobiveni rezultati uspoređeni različitim metodama. Time se vidi da geoidna undulacija ima važnu ulogu u pretvaranju GNSS visina u stvarne nadmorske visine, što je potrebno za primjenu u praksi.

Tijekom izrade rada najveći izazov bio je razumjeti teorijske pojmove i povezati ih s praktičnim dijelom. Ipak, rad je omogućio bolje razumijevanje kako fizika utječu na geodetska mjerenja.

Cilj rada je ostvaren jer je objašnjena geoidna undulacija i njezina primjena u geodeziji.

LITERATURA

- [1] Toskić A., *Oblik i dimenzija Zemlje*, geografski odsjek PMF-a, Sveučilišta u Zagrebu
- [2] Pleslić S., *Gravitacija i Inercijski sustavi* (2014), pripreme za predavanja iz Fizike -1, FER:
- [3] Brković N., Pećina P. (2010), *Fizika u 24 lekcije*, priručnik za pripremu državne mature
- [4] Šimić Z., *Geodetske mreže i koordinatni sustavi*, geodetska tehnička škola Zagreb
- [5] Šimić Z., (2012), *Geodezija 1*, geodetska tehnička škola Zagreb
- [6] Markovinović D., Špodnjak T., Bjelotomić O. (2011), *Utjecaj sile teže u geometrijskom nivelmanu*
- [7] Šimić Z., *Metode nivelmana i instrumenti*, geodetska tehnička škola Zagreb
- [8] Herent, M., Horvat, H., Kriste, I. (2013), *Transformacija koordinata homogenih polja u HDKS*
- [9] Brajković Z., Diplomski rad (2012), *Neke primjene matematike u geodeziji*, matematički odsjek PMF-a Sveučilišta u Zagrebu
- [10] Bašić T., (2010), *Novi geodetski datumi Republike Hrvatske*, druga geodeta MŽ Čakovec
- [11] Lučić M., Diplomski rad (2006), *Važnost ubrzanja sile teže u sustavu visina*, Geodetski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

POPIS SLIKA

<u>Slika 1 - Zemlja kao savršena sfera</u>	2
<u>Slika 2 - Zemljina realna površina</u>	2
<u>Slika 3 - spljošten oblik Zemlje</u>	2
<u>Slika 4 - utjecaj gravitacije (silnice)</u>	3
<u>Slika 5 - uzrok utjecaja centrifugalne sile</u>	4
<u>Slika 6 - utjecaj centrifugalne sile</u>	4
<u>Slika 7 - privlačenje na Zemlji</u>	4
<u>Slika 8 - gravimetrijska mjerenja</u>	5
<u>Slika 9 - gravitacijska sila između dva tijela</u>	6
<u>Slika 10 - utjecaj gravitacijskog polja na bliža i udaljenija tijela</u>	7
<u>Slika 11 - centrifugalna i centripetalna sila</u>	8
<u>Slika 12 - promatrač "vidi" centrifugalnu silu</u>	9
<u>Slika 13 - promatrač "vidi" centripetalnu silu</u>	9
<u>Slika 14 - utjecaj gravitacijske i centrifugalne sile na Zemlju</u>	9
<u>Slika 15 - ubrzanje sile teže na geografskoj širini od 90°, 45° i 0°</u>	15
<u>Slika 16 - ekvipotencijalne plohe</u>	16
<u>Slika 17 - modeli Zemlje (Zemljina površina, geoid, elipsoid i sfera)</u>	17
<u>Slika 18 - geoid</u>	18
<u>Slika 19 - ekvipotencijalna površina sile teže</u>	18
<u>Slika 20 - prikaz Zemljinog gravitacijskog polja i geoidne plohe</u>	19
<u>Slika 21 - elipsa</u>	20
<u>Slika 22 - spljošteni rotacijski elipsoid</u>	20
<u>Slika 23 - lokalni i globalni elipsoid</u>	21
<u>Slika 24 - razlika WGS84 i GRS80 elipsoida</u>	22
<u>Slika 25- parametri elipsoida</u>	22
<u>Slika 26 - primjer geodetskih datuma</u>	23
<u>Slika 27 - koordinatni sustav</u>	23
<u>Slika 28 - Europski i sjevernoamerički datum</u>	24
<u>Slika 29 - koordinatni sustav koji određuje kako je položaj početne točke</u>	24
<u>Slika 30 - datum koji definira početnu točku i referentnu površinu</u>	24
<u>Slika 31 - ovisnost vrijednosti visine o referentnoj plohi</u>	25
<u>Slika 32 - apsolutna visina</u>	25
<u>Slika 33 - HA, HB - apsolutna visina, HC, HD - relativna visina u odnosu na točku A</u>	26
<u>Slika 34 - elipsoidna visina</u>	27
<u>Slika 35 - smjer normale</u>	27
<u>Slika 36 - ortometrijska visina</u>	28
<u>Slika 37 - smjer vertikalne / težišnice</u>	28
<u>Slika 38 - razlika između težišnice i normale</u>	29
<u>Slika 39 - razlika između elipsoidne i ortometrijske visine</u>	29
<u>Slika 40 - geoidna undulacija</u>	30
<u>Slika 41 - pozitivna i negativna vrijednost geoidne undulacije</u>	30
<u>Slika 42 - razlog izbočenju geoida na nekom području</u>	31
<u>Slika 43 - stabiliziran reper</u>	32
<u>Slika 44 - HVR571</u>	33
<u>Slika 45 - geometrijski nivelman</u>	33
<u>Slika 46 - trigonometrijski nivelman</u>	34
<u>Slika 47 - GPS</u>	34

<u>Slika 48 - HTRS96/TM</u>	35
<u>Slika 49 - transformacije i konverzija</u>	36
<u>Slika 50 - sustav STGO</u>	37
<u>Slika 51 - reperi koji su se mjerili prikazani u ArcGIS-u</u>	37
<u>Slika 52 - 1. točka - slavica</u>	38
<u>Slika 53 - 2. točka - pošta</u>	38
<u>Slika 54 - 3. točka - pile</u>	38
<u>Slika 55 - 4. točka - stanica</u>	38
<u>Slika 56 - 5. točka - stradun</u>	38
<u>Slika 57 - oprema: nivelir, stativ, letva i GPS</u>	39
<u>Slika 58 - mjerenje točke T1</u>	40
<u>Slika 59 - mjerenje repera R1</u>	40
<u>Slika 60 - mjerenje 2. točke - pošta</u>	40
<u>Slika 61 - mjerenje 3. točke - pile</u>	41
<u>Slika 62 - mjerenje 4. točke - stanica</u>	41
<u>Slika 63 - mjerenje 5. točke - stradun</u>	41
<u>Slika 64 - tablica visina točaka dobivenih putem geometrijskog nivelmana</u>	43
<u>Slika 65 - konverzija koordinata putem aplikacije T7D</u>	44
<u>Slika 66 - geoidna undulacija dobivenim putem geometrijskog nivelmana</u>	44
<u>Slika 67 - elipsoidni (geodetski) zapis</u>	45
<u>Slika 68 - ravninski zapis</u>	45
<u>Slika 69 - geoidna undulacija dobivenim putem GPS-a</u>	45